ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia sino al 3 luglio 1898

Fisica terrestre. — *Determinazioni della gravità relativa fatte nelle regioni Etnee e nella Sicilia orientale.* Nota del Corrispondente A. Riccò.

Preliminari. — Avendo conosciuto gli importantissimi risultati ottenuti dalla Marina Austriaca nelle numerose determinazioni fatte della gravità relativa con quello strumento di meravigliosa semplicità e perfezione, che è il pendolo del colonnello Von Sterneck, ed essendo evidente il grandissimo interesse che tale studio avrebbe presentato nelle regioni Etnee, nelle Eolie ed in Calabria, per i lumi che avrebbe potuto fornire sulla costituzione della scorza terrestre in queste località, frequentemente tormentate da eruzioni vulcaniche e da terremoti, feci proposta al Direttore dell' Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica, comm. prof. Tacchini di far eseguire le determinazioni della gravità relativa nelle suaccennate località.

La proposta presentava anche una ragione di opportunità per altri motivi: spingendo queste determinazioni della gravità fino a Taranto e Castellammare, ove hanno fatto stazione gli osservatori austriaci, si avrebbe avuto un utile controllo; e le nostre osservazioni, unendosi alle austriache, avrebbero dato la cognizione della gravità in tutta l' Italia meridionale ed in Sicilia: aggiungendo a queste le determinazioni fatte nell' Italia settentrionale e le altre che potranno farsi da osservatori italiani; unendovi appresso quelle che il Bigourdan ha intenzione di fare nelle coste mediterranee della Francia, in Corsica e nella costa settentrionale dell' Africa, si avrebbe così la gravità determinata in gran parte del bacino del Mediterraneo e dell' Adriatico.

La mia proposta fu caldamente appoggiata presso il Consiglio Direttivo dal prof. Tacchini, il quale inoltre pensò di domandare in prestito l'apparato pendolare di Sterneck all'I. R. Ufficio Idrografico di Pola. Approvato il progetto dal Consiglio Direttivo di Meteorologia e Geodinamica, ottenuti i fondi dal Ministero d'Agricoltura, accordato cortesemente dall'Ufficio Idrografico di Pola il prestito degli strumenti, fu deciso di fare intanto le determinazioni della gravità relativa nelle regioni Etnee e nella Sicilia orientale, per poi continuarle in Calabria e nelle Eolie.

Il prof. Tacchini dispose pure che si facessero dal prof. Palazzo, nelle stesse località, delle determinazioni speciali del magnetismo terrestre, le quali avranno un singolare interesse per le relazioni che pare esistano fra le anomalie della gravità e quelle del magnetismo medesimo.

Per questa prima parte del lavoro fu stabilita una rete di 16 stazioni. Mi rivolsi allora al Ministero dei telegrafi per avere la trasmissione telegrafica dei segnali del tempo direttamente dall'Osservatorio di Catania agli uffici telegrafici di quelle stazioni che ne sono fornite. Il Direttore dei Telegrafi in Catania cav. B. Sesti, invitato dal Ministero suddetto ad aiutarci nella nostra impresa, lo ha fatto col più grande impegno, cosicchè in tutte le stazioni, subito o dopo qualche prova si è potuta avere la detta trasmissione dei segnali del tempo. Per le due stazioni dell'Osservatorio Etneo e della Cantoniera Meteorico-Alpina, ove non vi era la comunicazione telegrafica (che ora si sta impiantando) fu adottata la trasmissione ottica dei segnali del tempo con due grandi eliotropii, costruiti dal meccanico dell'Osservatorio A. Capra; nel caso che mancassero i segnali ottici (come purtroppo avvenne per causa delle nubi), si sarebbe fatta la determinazione del tempo col sestante.

Inoltre mi diressi ai Sindaci ed ai Capi d'ufficio telegrafico dei luoghi di stazione per avere un locale a piano di terra, vicino all'ufficio stesso, in modo da potere con fili congiungere la linea ai nostri apparati. Tutto il personale dell'Osservatorio ha preso parte alle operazioni nel seguente modo:

Riccò: Osservazioni di pendolo e calcolo delle osservazioni.

Mascari: Trasmissione telegrafica ed ottica dei segnali del tempo.

Saija: Determinazione del tempo e dell'andamento degli orologi.

Arcidiacono: Determinazione delle quote medie del terreno circostante alle stazioni.

Tringali: Assistenza alle osservazioni di pendolo, e ripetizione dei relativi calcoli per controllo.

Apparati, osservazioni e riduzioni. — L'apparato pendolare Sterneck, prestato dall'Ufficio Idrografico di Pola si compone di 3 pendoli N. 25, 26, 27, del sostegno e della staffa a muro, sull'uno o sull'altro dei quali si fanno oscillare i pendoli; dell'apparato delle coincidenze con cui si osservano le coincidenze delle oscillazioni del pendolo Sterneck con quelle dell'orologio;

del detto orologio che si congiunge elettricamente col suddetto apparato delle coincidenze; inoltre di varî accessori. A tuttociò il Direttore dell' Ufficio Idrografico di Pola, I. R. contr' ammiraglio cav. Alessandro von Kalmár, ha con squisita cortesia aggiunte le tavole di riduzione delle osservazioni, particolareggiate istruzioni, e perfino le schede per trascrivervi regolarmente le osservazioni: il che naturalmente ha di molto facilitato ed abbreviato il nostro compito.

Credo opportuno di dare all' Accademia una succinta relazione di quel che si è fatto e dei risultati ottenuti nella prima parte del lavoro, e prima d' intraprenderne un' altra, riserbandomi di fare a suo tempo una esposizione particolareggiata delle operazioni ed una discussione più completa dei risultati.

Noi abbiamo sempre preferito di far oscillare i pendoli sulla staffa a muro, perchè così si è evitata la costruzione od il trasporto di un pilastro di pietra; ed inoltre colla staffa a muro è eliminata la perturbazione dipendente dal lieve oscillare del pilastro insieme al pendolo. Si è poi stabilito di fare per ogni stazione due serie d' osservazioni dei tre pendoli, come hanno fatto in generale anche gli osservatori austriaci, e si è determinato l' intervallo di 60 coincidenze, e per ogni pendolo si sono presi al minimo 10 di tali intervalli, aumentandone il numero quando per circostanze speciali si riteneva che l' osservazione fosse riuscita meno bene.

Siccome i pendoli Sterneck battono circa il mezzo secondo, e l' intervallo di 60 coincidenze è circa 35^m, ne viene che in esso son comprese circa 4200 oscillazioni; e siccome si prendono almeno 10 di tali intervalli da cui si ricava il medio, ed in ogni stazione si fanno 6 di tali osservazioni, si vede come si riesca ad ottenere il tempo dell'oscillazione del pendolo con grande precisione.

Al tempo sidereo d' oscillazione debbono portarsi, per ogni osservazione, le seguenti correzioni:

U per l' andamento dell' orologio sidereo elettrico;
$\varDelta$ per ridurre l' ampiezza delle oscillazioni a zero;
T per ridurre la temperatura del pendolo a zero;
δ per la riduzione al vuoto.

Fatto il medio dei tempi ottenuti da ciascun pendolo della serie in una stazione, S_s (V. Tabella I), col corrispondente tempo esservato in Pola S_p, e col valore della gravità relativa in Pola $G_p = 9^m,80642$ (ottenuto per confronto colla gravità assoluta determinata in Vienna), colla nota formola si ottiene la gravità relativa nella stazione:

$$G_s = \frac{S_p^2}{S_s^2} G_p \ .$$

Volendo ridurre al livello del mare la gravità delle stazioni, bisogna fare la correzione per l'altitudine, la correzione per la massa di roccie sottostanti, la correzione per le roccie sovrastanti alla stazione, la correzione (quando ne sia il caso) per le porzioni di mare, che rendono la gravità minore in confronto ad egual volume di roccia. Queste riduzioni sono molto laboriose, ma vengono assai abbreviate coi metodi e colle tavole usate dalla marina austriaca, e di cui noi pure ci siamo valsi.

Delle dette riduzioni la prima è affatto sicura, non dipendendo che dalla altezza della stazione sul mare; le altre presentano qualche incertezza, perchè non si può conoscere con piena sicurezza la densità complessiva delle roccie nell'interno della terra; infatti mentre per una parte devesi ritenere che la densità degli strati profondi sia in generale maggiore che per i superficiali, d'altra parte vi possono essere dei vuoti che la modifichino in senso opposto, e ciò specialmente per le stazioni Etnee, e particolarmente per le più alte, la Cantoniera e l'Oss. Etneo. Ma ad ogni modo per la piccola entità di queste correzioni, l'incertezza si riduce a ben poca cosa.

Ottenuto così il valore della gravità ridotta al livello del mare, ossia sullo sferoide dei geodeti, si confronta alla gravità teorica nella stazione, data dalla formola di Helmert:

$$G_0 = 9^m,780\,(1 + 0,005310 \text{ sen}^2 \varphi)$$

e la differenza dà la corrispondente anomalia delle gravità (V. Tabella II).

Si noterà, nella Tabella I, che la durata dell'oscillazione dei varî pendoli a Catania nella seconda osservazione è minore che nella prima, e nel medio si ha una perdita di durata di $0^s,0000066$, dalla prima decade di Ottobre 1896 alla metà di marzo 1898. Questo fatto non deve far dubitare della esattezza dell'osservazione, perchè si verifica sempre nelle osservazioni col pendolo Sterneck; e la variazione è quasi sempre nel senso da noi trovato ed all'incirca della stessa entità, cioè di quasi $0^s,000007$ in circa 5 mesi.

Questa, cosidetta variazione *secolare* del pendolo dipende, o da una modificazione molecolare del metallo dei pendoli, analoga a quella che ha luogo nel vetro dei termometri, oppure dal consumo del taglio del cuneo d'agata su cui oscillano.

Si suol correggere le osservazioni per questa variazione, distribuendo la corrispondente variazione della durata d'oscillazione proporzionalmente al tempo trascorso fra l'osservazione alla partenza e l'osservazione al ritorno delle spedizioni a Pola: perciò noi ci riserviamo di fare questa correzione, d'altronde abbastanza piccola, quando i pendoli saranno di nuovo tornati a Pola, ed ivi si sarà ripetuta la determinazione del tempo della loro oscillazione. Perciò i valori della gravità che qui si dànno, dovranno poi subire una piccola correzione.

Determinazione del tempo. — Quanto al modo in cui si è determinato il tempo e l'andamento dell'orologio elettrico *Hawelk* che ha dato la durata dell'oscillazione dei pendoli, la stagione invernale non ha permesso di mantenere un rigido programma di osservazioni astronomiche e di segnalazioni del tempo: ad ogni modo si è cercato con metodi di calcolo adattati alle diverse osservazioni e circostanze, di raggiungere un sufficiente e costante grado di precisione nella determinazione finale dell'andamento orario del detto pendolo *Hawelk*. Ad eccezione di due stazioni, in tutte le altre gli orologi di campagna (pendolo *Hawelk* e cronometri di marina) venivano confrontati direttamente due volte al giorno, coll'orologio sidereo normale dell'Osservatorio di Catania, mediante appositi segnali telegrafici. Per determinare l'andamento orario dell'orologio normale, si facevano in Catania ogni sera osservazioni meridiane di stelle allo strumento dei passaggi, preferendo possibilmente le stesse stelle per le sere di un medesimo periodo di osservazioni. E quando il cielo coperto non permetteva osservazioni di stelle, si ricorreva alle osservazioni meridiane solari. Effettivamente i segnali telegrafici venivano fatti per mezzo dell'orologio sidereo (*Cavignato I*) dello strumento dei passaggi, ma il confronto cronografico fatto immediatamente tra il pendolo *Cavignato I* ed il pendolo sidereo *Cavignato II* del padiglione dell'Equatoriale fotografico permise di introdurre nei calcoli di quasi tutte le stazioni (ad eccezione di Catania, 1ª determinazione, e Nicolosi) l'andamento orario del *Cavignato II*, che è più regolare di quello del pendolo *Cavignato I*. Nella Tabella III è dato l'andamento orario dell'orologio elettrico *Hawelk*, adottato pei giorni di osservazione di pendolo nelle varie stazioni.

Come di consueto all'andamento orario si è posto il segno *meno* quando l'orologio ritardava sul tempo sidereo, ed il segno *più* quando avanzava.

Inoltre, l'andamento orario si riferisce ad *ora orologio*, cioè è stato determinato dividendo la differenza fra due *correzioni* per il corrispondente numero di ore segnate dall'orologio nell'intervallo fra le due osservazioni.

Nelle 8 stazioni in cui si potè ottenere direttamente il confronto telegrafico del pendolo *Hawelk* col pendolo dell'Osservatorio, l'andamento dell'*Hawelk* si è dedotto dal primo e dall'ultimo confronto telegrafico racchiudente la serie di osservazioni della gravità, convertendo l'intervallo del pendolo normale in intervallo sidereo, e dividendo la differenza fra l'intervallo del pendolo *Hawelk* e l'intervallo sidereo, per l'intervallo dell'*Hawelk*, espresso in ore e frazioni decimali d'ora.

Nelle 6 stazioni, poi, in cui per ragioni di locale si dovette confrontare telegraficamente un cronometro marino, e poi con confronti a voce veniva paragonato l'*Hawelk*, si è proceduto in questo modo:

Si è convertito in intervallo di tempo medio l'intervallo di tempo del pendolo normale scorso fra le due estreme segnalazioni telegrafiche, e si è divisa la differenza fra l'intervallo del cronometro marino e l'intervallo di

tempo medio, per l'intervallo del cronometro marino, espresso in ore e frazioni decimali d'ora. Così si è ottenuto l'andamento orario del cronometro campione. Si è poi convertito l'intervallo cronometrico scorso fra il primo e l'ultimo confronto a voce in intervallo di tempo sidereo, e la differenza fra l'intervallo corrispondente dell'*Hawelk* e l'intervallo sidereo, divisa per l'intervallo *Hawelk*, ha dato l'andamento orario dell'*Hawelk*.

Nelle due stazioni di montagna, Oss. Etneo e Cantoniera, l'andamento dell'*Hawelk* si è ottenuto dai confronti a voce col cronometro normale allo stesso modo, mentre l'andamento orario del cronometro si è ottenuto da osservazioni di altezze di sole fatte col sestante.

Il cronometro marino normale nelle diverse stazioni è stato il *Frodsham*, ad eccezione di qualche stazione dove è stato il *Parkinson-Frodsham* od il *Marten*.

Si deve notare che l'orologio *Hawelk* veniva montato e smontato in ogni stazione, quindi il suo andamento nelle varie stazioni non poteva riuscire nè eguale, nè piccolo. In ciascuna stazione però si manteneva abbastanza costante, come si è verificato determinandolo per controllo negli intervalli di 3 oppure 4 segnalazioni telegrafiche, inviate ad una medesima stazione.

Si è adottato in generale il sistema di determinare l'andamento degli orologi coi massimi intervalli, allo scopo di rendere minima l'influenza dell'errore dei confronti; e d'altra parte nell'intervallo complessivo per le 6 osservazioni di pendolo, le piccole variazioni dell'andamento dell'orologio elettrico tendono a compensarsi nel dare la durata media dell'oscillazione.

STAZIONE	Data	Andamento orario dell' Hawelk	STAZIONE	Data	Andamento orario dell' Hawelk
		s			s
Catania . .	7-8 ottobre 1897	+ 0,121	Mineo . . .	8-9 dicembre 1897	+ 0,384
»	9-12 » »	+ 0,185	Buccheri . .	10-11 » »	+ 0,231
»	13 » »	+ 0,166	Milo	2-3 gennaio 1898	— 0,046
Nicolosi . .	14-15 » »	— 0,267	Giarre . . .	4-5 » »	+ 0,516
Cantoniera	30-31 » »	— 0,527	Acireale . .	6-7 » »	+ 0,321
Oss. Etneo	1-2 novembre »	— 0,805	Taormina .	24-25 febbraio »	+ 0,676
Paternò . .	20 » »	+ 0,504	Alì	27-28 » »	+ 0,566
»	21 » »	+ 0,509	Messina . .	1-2 marzo »	+ 0,916
Bronte . . .	23-24 » »	+ 0,369	Catania . .	13 » »	+ 0,544
Randazzo .	25 » »	+ 0,286	»	14 » »	+ 0,538
Linguaglossa	26-27 » »	+ 0,413			

Segnali del tempo. — Quanto al sistema adottato per trasmettere e ricevere i segnali del tempo, all'Osservatorio Etneo ed alla Cantoniera erasi

stabilito di valersi dei segnali ottici, ma la stagione avanzata fece sì che le nubi non ci permettessero il passaggio che di una sola serie di segnali all' Osservatorio Etneo, che riuscì benissimo, e ci diede un controllo confortante dell' esattezza del tempo determinato col sestante, che nella previsione di ciò che infatti accadde, avevamo portato con noi.

Nelle altre stazioni la trasmissione telegrafica dei segnali la ricevevo ad orecchio coll' elettromagnete dell' apparato stesso delle coincidenze, oppure a tatto, come trovai assai comodo e pratico, tenendo nelle mani alquanto umettate le estremità dei fili della linea, prolungata fino in prossimità dell' orologio elettrico *Hawelk*, col quale rilevavansi i tempi dei segnali che arrivavano di 10 in 10 secondi.

Per la stazione di Milo nella Valle del Bove, non essendo visibili i segnali ottici da Catania, si rilevavano i segnali telegrafici al più vicino ufficio telegrafico in Zafferana Etnea, mediante l' eccellente cronometro *Frodsham*, il quale avendo la macchina munita di una speciale sospensione a molla, riesce attissimo a resistere agli scuotimenti dei viaggi di terra, come è risultato dalla sufficiente costanza del suo andamento in tutta la spedizione. Da Zafferana il cronometro veniva trasportato a Milo in vettura colle maggiori precauzioni, in un viaggio di circa $^3/_4$ d' ora, e là veniva subito confrontato all' *Hawelk* ed agli altri orologi.

Per tutta la spedizione si portò anche un secondo cronometro di marina ed un cronometro tascabile, i quali però in generale non si adoperavano che per controllo.

Risultati. — Come vedesi nella Tabella II e come è evidente nella cartina (fig. 1) ove son tracciate le linee di eguale anomalia di gravità di 50, 100 e 150 unità del quinto ordine decimale, nelle stazioni litoranee da Catania a Messina vi è un sensibile eccesso della gravità ridotta al livello del mare, rispetto la gravità teorica, di circa 150 delle dette unità. Questo eecesso equivarrebbe, secondo il prof. Helmert, all'aumento di gravità che sarebbe prodotto da uno strato di roccia della densità 2.5, collo spessore di circa 1500 m.

Attorno all' Etna il detto eccesso va diminuendo fortemente col procedere verso la cima, ove è minimo. Al luogo dell'ammasso basaltico di Monte Lauro, cioè nelle stazioni di Buccheri e Mineo, tale diminuzione non ha luogo, in Mineo vi è un eccesso di gravità circa eguale a quella che ha luogo in Catania, ed in Buccheri l'eccesso è anche alquanto maggiore.

Il difetto di gravità all' Etna può spiegarsi ammettendo che sotto il vulcano esista veramente del vuoto, come potrebbe esser quello dei canali e focolari ignivomi; ma potrebbesi anche spiegare quel risultato per avere calcolato nelle riduzioni l'aumento di gravità causato dalla massa della montagna, come quello di un paraboloide massiccio di lava, mentre certamente vi sono dei vuoti, come il camino principale centrale, i secondarii delle eru-

zioni laterali, solo in parte occupati e chiusi dai materiali vulcanici; ed inoltre non è improbabile che vi siano anche grandi caverne lasciate vuote

Fig. 1. — Anomalie delle gravità in unità del 5° ordine decimale.

dalle eruzioni per l'estirpamento e trascinamento di antiche roccie laviche, fatto che vediamo sempre aver luogo nelle eruzioni. Ma ad ogni modo questi vuoti in confronto al gran volume della montagna, di circa 960 kmc., debbono esser poca cosa. Poichè non si ammettono più i crateri di sollevamento, nel qual modo di formazione potrebbero prodursi grandi vacuità, la formazione per strati di materiali pastosi, fluidi od incoerenti, sovrapposti, non permette di supporre che piccoli vuoti fra gli stessi strati. Come si vede dalla Tabella II, nell'Etna vi è, in confronto a Catania, un difetto di gravità che è più di un terzo dell'aumento prodotto dalla massa della montagna: ossia il difetto di massa dell'Etna è circa $^1/_3$ della massa del vulcano stesso.

Ciò potrebbe spiegare in parte il fatto che in Catania, malgrado l'attrazione del gran cono Etneo, il cui centro dista dalla città 28 km., la latitudine astronomica coincide all'incirca colla geodetica, avendosi:

Lat. astronomica	+ 37°,30′,13″,21
Lat. geodetica da Castanea	+ 37°,30′,11″,35
Differenza . . .	1,86

Cioè la deviazione della verticale secondo il meridiano è solo di 1″,86; anzi è inoltre verso sud. cioè in senso opposto all' Etna. Per altra parte questo fatto potrebbe spiegarsi coll' attrazione presso che in senso opposto esercitata dal grande massiccio dei basalti di Monte Lauro, alto quasi 1000 m., che sta a circa 50 km. a S-SW di Catania, nel quale, come si è detto, non esiste difetto di gravità rispetto Catania; il che era da aspettarsi per il diverso modo di origine e formazione dei basalti; i quali sono usciti dall' interno della terra e si sono espansi molto probabilmente sul fondo dei mari, quindi sotto forte pressione, per cui non possono aver lasciato grandi vuoti. Inoltre poi attualmente, mentre l' Etna rappresenta un organismo ancora vivo, entro e sotto cui debbono quindi trovarsi spazî liberi per l' espansione e la circolazione dei fluidi cui debbonsi gli spaventosi orgasmi del vulcano, i basalti di Monte Lauro rappresentano una massa inerte, ove non circolano più i fluidi, ove quindi ogni via, ogni canale, ogni spazio comunicante coi focolari endogeni è ostruito, occupato definitivamente da materiale solido: donde l' attuale ammasso compatto di roccie basaltiche, che aggiunge tutta l' attrazione della sua massa e delle profonde sue radici a quella della scorza terrestre nella piana di Catania, e di Val di Noto, come se vi fosse semplicemente sovrapposta; e quindi può bene questa sua attrazione equilibrare e fors' anche superare alquanto quella esercitata dall' Etna sul filo a piombo in Catania. Si noterà poi che nell' Etna il difetto di gravità rispetto Catania si estende in modo singolare nella Valle del Bove, fino a Giarre, il che non deve sorprendere pensando alle anomalie che certamente la scorza terrestre deve presentare in quell' enorme squarcio del vulcano; e così non dovrà sorprendere la singolarità che presenta la stazione di Milo nella parte bassa della detta valle, ove la gravità è alquanto maggiore che a Giarre, mentre altrove procedendo verso il centro del vulcano la gravità diminuisce. È notevole poi il minimo di gravità ad Alì, regione nota per fenomeni di attività endogena, come le sorgenti minerali e termali, ed inoltre per le singolari anomalie geologiche, le quali dimostrano che ivi ebbero luogo grandi sconvolgimenti della scorza terrestre.

Nel finire compio il gradito dovere di ringraziare il Consiglio Direttivo di Meteorologia ed il prof. P. Tacchini che mi hanno fornito i mezzi per fare questi interessanti studî; l' illustrissimo sig. Contrammiraglio A. Kalmár, Direttore dell' Ufficio Idrografico di Pola per avere con tanta cortesia accordato, oltre al prestito degli istrumenti, tante altre facilitazioni; gli ufficiali telegrafici che mi hanno secondato con tanta premura e cortesia; i colleghi dell' Osservatorio per avermi aiutato col maggior zelo ed attività.

Tabella I.

Stazioni	Durata dell'oscillazione dei pendoli			
	N. 25	N. 26	N. 27	Medio
Catania I Sotterraneo dell'Osservatorio 7-12 ottobre 1897	0s.5071176 1243 1076	0s.5073060 3154 3070	0s.5072212 2183 2151	
Medie . . .	0. 5071165	0. 5073095	0. 5072182	0s.5072147
Catania II Sotterraneo dell'Osservatorio 13-14 marzo 1898	0. 5071154 1132 1147	0. 5072945 3033 3006	0. 5072116 2075 2122	
Medie . . .	1144	2995	2104	0. 5072081
Nicolosi Casa Comunale 14-15 ottobre 1897	1608 1618	3484 3510	2527 2509	
Medie . . .	1613	3497	2518	0. 5072543
Cantoniera Meteorico alpina 30-31 ottobre 1897	2317 2099	4167 4211	3143 3221	
Medie . . .	2208	4189	3182	0. 5073193
Osservatorio Etneo Camera terrena 1-2 novembre 1897	3004 3001 2981*	4890 4781	3932 3912	
Medie . . .	2995	4835	3922	0. 5073917
Paternò Casa particolare 20-21 novembre 1897	1406 1397	3307 3355	2333 2310	
Medie . . .	1401	3331	2322	0. 5072351
Bronte Casa particolare 23-24 novembre 1897	1700 1686	3620 3482	2661 2660	
Medie . . .	1693	3551	2660	0. 5072635
Randazzo Ufficio telegrafico 25 novembre 1897	1581 1618	3347 3507	2498 2525	
Medie . . .	1599	3427	2512	0. 5072513

* Si è fatta una terza osservazione del pendolo N. 25, pel dubbio che nella prima i bolloni murati per sostegno dell'apparato pendolare non fossero abbastanza consolidati.

Tabella I (*seguito*).

STAZIONI	Durata dell' oscillazione dei pendoli			
	N. 25	N. 26	N. 27	Medio
Linguaglossa Albergo 26-27 novembre 1897	0s.5071412 1400	0s.5073349 3304	0s.5072295 2368	
Medie . . .	1406	3326	2332	0s.5072355
Mineo Casa dell'Ufficiale telegrafico 8-9 dicembre 1897	1434 1426	3338 3374	2354 2388	
Medie . . .	1430	3356	2371	0. 5072386
Buccheri Casa particolare 10-11 dicembre 1897	1619 1626	3497 3511	2472 2539	
Medie . . .	1622	3504	2506	0. 5072544
Milo Casa particolare 2-3 gennaio 1898	1497 1625	3547 3559	2576 2565	
Medie . . .	1561	3553	2570	0. 5072561
Giarre Ufficio telegrafico 4-5 gennaio 1898	1305 1295	3227 3188	2246 2246	
Medie . . .	1300	3208	2246	0. 5072251
Acireale Ufficio telegrafico 6-7 gennaio 1898	1258 1273	3058 2991	2143 2099	
Medie . . .	1265	3025	2121	0. 5072137
Taormina Casa particolare 24-25 febbraio 1898	1272 1280	3157 3095	2150 2246	
Medie . . .	1276	3126	2198	0. 5072200
Alì Casa dell'Ufficiale telegrafico 27-28 febbraio 1898	1186 1193	2970 3047	2107 2172	
Medie . . .	1189	3009	2139	0. 5072112
Messina Camera di Commercio 1-2 Marzo 1898	1004 1022	2887 2887	1955 1929	
Medie . . .	1013	2887	1942	0. 5071947

TABELLA II.

STAZIONI	Terreno	Latitudine	Longitudine	Altitudine	Gravità teorica G_0	Gravità osservata	Correzione per l'altitudine	Correzione per le masse sottostanti	Correzione per le masse sovrastanti	Gravità ridotta al livello del mare G_s	Anomalia di Gravità $G_s - G_0$
Catania I	Lava	37°.30′.11″	2°.37′.39″	43 m	9.79925 m	9.80062 m	+ 13	— 5	0	9.80070 m	+ 145
Catania II	id.	id.	id.	id.	id.	9.80088	id.	id.	id.	9.80096	+ 171
Nicolosi	Lava	37.36.45	2.34.26	700	9.79934	9.79909	+ 215	— 81	+ 2	9.80045	+ 111
Cantoniera	Lava	37.41.50	2.32.36	1882	9.79942	9.79658	+ 579	— 210	+ 5	9.80032	+ 90
Osservatorio Etneo . .	Lava	37.44.17	2.32 46	2943	9.79945	9.79377	+ 905	— 312	+ 1	9.79971	+ 26
Paternò	Calcare Basalti	37.33.54	2.26.47	235	9.79930	9.79983	+ 72	— 27	0	9.80028	+ 98
Bronte	Lava Calcare	37.47. 4	2.22.49	793	9.79949	9.79874	+ 243	— 87	+ 2	9.80032	+ 83
Randazzo	Lava Calcare	37 52.30	2.29.44	760	9.79957	9.79920	+ 233	— 83	+ 4	9.80074	+ 117
Linguaglossa	Lava Calcare	37.50.32	2.41.24	540	9.79954	9.79982	+ 166	— 59	+ 2	9.80091	+ 137
Mineo	Basalti Calcare	37.15.53	2.14.21	455	9.79904	9.79970	+ 140	— 50	0	9.80060	+ 158
Buccheri	Basalti	37. 7.30	2.23.58	797	9.79892	9.79909	+ 245	— 92	0	9.80062	+ 170
Milo	Lava	37.43.31	2.39.40	750	9.79944	9.79902	+ 230	— 84	+ 5	9.80053	+ 109
Giarre	Lava	37.43 31	2.43.56	85	9.79944	9.80022	+ 25	— 9	+ 5	9.80043	+ 99
Acireale	Lava	37.36.46	2.42.54	162	9.79933	9.80066	+ 50	— 17	0	6.80099	+ 166
Taormina	Calcare	37.51. 2	2.49.46	270	9.79955	9.80042	+ 83	— 25	+ 3	9 80103	+ 148
Alì	Granito Scisti	38. 0.11	2.58.17	5	9.79983	9.80075	+ 1	0	+ 7	9.80083	+ 100
Messina	Gneiss Calcare	38.11.32	3. 6.15	5	9.79985	9.80140	+ 1	0	+ 2	9.80143	+ 158

Chimica. — *Intorno ad alcune reazioni di fluosali e fluossisali.* Nota 2ª del Socio E. Paternò e di U. Alvisi

In una precedente Nota presentata all'Accademia (1) abbiamo descritte alcune reazioni di fluoruri metallici. Ci sembra di qualche interesse dare ora qualche cenno sopra alcune reazioni di fluosali e fluossisali, riserbandoci di ritornar poi più ampiamente su tutto l'argomento.

1. *Azione dell'acido ossalico sopra alcuni fluosali e fluossisali.*

Operammo quasi sempre con fluosali e fluossisali potassici e dalle esperienze eseguite possiamo dedurre che, trattando un fluosale o fluossisale potassico in soluzione acquosa, anche leggermente acida per acido fluoridrico, con una soluzione acquosa contenente tanto acido ossalico quanto corrisponda per equivalente alla somma degli elementi elettronegativi del sale complesso (cioè che si corrispondano molecolarmente secondo le valenze) si ha decomposizione del sale complesso stesso, con separazione da un lato del fluo o fluossiacido corrispondente e dall'altro del quadriossalato potassico che viene a precipitarsi in gran parte.

Così, trattando una soluzione acquosa di gr. 10 di fluoridrato potassico con una soluzione acquosa di gr. 16 di acido ossalico (secondo il rapporto $KHFl^2$ per $C^2O^4H^2.2H^2O$), si forma, agitando, un precipitato bianco cristallino, purchè le soluzioni non sieno diluitissime, che, seccato tra carta, diede all'analisi i seguenti risultati:

Gr. 0,5003 di sostanza consumarono c. c. 78,95 di permanganato $^n/_{10}$ e gr. 1,6524 diedero dopo calcinazione gr. 0,4512 di carbonato potassico, quindi per 100 p.

	Trovato	Calcolato da $KHC^2O^4.H^2C^2O^4.2H^2O$
$= C^2O^4$	69,43	69,29
K^2CO^3	27,30	27,16

Concentrando il liquido, donde si separò l'abbondante cristallizzazione, svolgesi acido fluoridrico.

Gr. 5 di fluosilicato potassico si riscaldarono a b. m. con una soluzione acquosa di acido ossalico nel rapporto K^2SiFl^6 per $3C^2O^4H^2.2H^2O$.

Dopo circa 12 ore di riscaldamento si filtrò dal residuo, e dal liquido concentrato cristallizzò il quadriossalato potassico. Infatti gr. 0,4198 di esso

(1) V. questi Rendiconti, 1° sem. 1898, pag. 327.

sale consumarono c. c. 66 di permanganato $^{n}/_{10}$ e gr. 1,0118 diedero dopo calcinazione gr. 0,2732 di $K^2 CO^3$, quindi per 100 p.

Trovato		Calcolato da $KHC^2 O^4 . H^2 C^2 O^4 . 2H^2O$
= $C^2 O^4$	69,17	69,29
$K^2 CO^3$	27	27,16

L'attacco del fluosilicato per azione dell'acido ossalico è abbastanza rapido; dopo 24 ore circa di riscaldamento i 5 gr. sono completamente decomposti.

Trattando una soluzione acquosa di fluossiuranato tripotassico con una soluzione acquosa calda e concentrata di acido ossalico in eccesso, a mano a mano che il liquido si raffredda, e agitando, si depone una sostanza bianca cristallina, che, seccata tra carta, diede all'analisi i risultati corrispondenti alla composizione del quadriossalato potassico, infatti:

Gr. 0,2850 consumarono c. c. 45 di permanganato $^{n}/_{10}$ e gr. 0,5304 lasciarono dopo calcinazione gr. 0,1462 di $K^2 CO^3$, quindi per 100 p.

Trovato		Calcolato da $KHC^2 O^4 . H^2 C^2 O^4 . 2H^2O$
= $C^2 O^4$	69,47	69,29
$K^2 CO^3$	27,56	27,16

Concentrando la soluzione gialla, donde si separò il quadriossalato, svolgesi abbondantemente acido fluoridrico.

Gr. 10 di fluossitungstato potassico normale si disciolsero in molta acqua, lievemente acidulata con acido fluoridrico, e si trattarono con una soluzione di gr. 15 di acido ossalico (nelle porzioni: $WO^2 Fl^2 2KFl . 2H^2O$ per $4C^2 O^4 H^{2\prime} 2H^2O$) e si concentrò a b. m. Si deposero de' cristalli di abito prismatico con faccette terminali ben sviluppate nel senso dell'asse cristallografico della z e con clivaggio ben distinto. Questo sale, che è un po' giallastro se resta impregnato di acido tungstico, è quadriossalato potassico.

Infatti gr. 0,3663 di sostanza consumarono c. c. 57,5 di permanganato potassico $^{n}/_{10}$ e gr. 0,3100 diedero dopo calcinazione gr. 0,0834 di $K^2 CO^3$ quindi per 100 p.

Trovato		Calcotato da $KHC^2 O^4 . H^2 C^2 O^4 . 2H^2O$
= $C^2 O^4$	69,06	69,29
$K^2 CO^3$	26,90	27,16

Separati i cristalli e concentrando, il liquido intorbida separandosi una sostanza gommosa giallastra e svolgendosi acido fluoridrico.

Operando col fluossimolibdato potassico si ottengono reazioni analoghe.

Eseguimmo anche così sommariamente alcune esperienze di saggio sull'attacco di alcuni minerali di terre rare, prima con acido fluoridrico poi con

acido ossalico. Ne diamo qualche cenno riserbandoci di proseguirne lo studio e di tentare le separazioni.

Della Cerite di Nya-Bastnass venne attaccata convenientemente con acido fluoridrico, e il miscuglio de' fluosilicati di Cerio, Lantanio etc. dopo lavaggio, ed essiccamento, si trattò a b. m. con una soluzione concentrata ed in eccesso di acido ossalico. Dopo circa 48 ore di riscaldamento a b. m., il miscuglio non conteneva più fluore e i fluosilicati eransi trasformati in ossalati.

Un campione di Gadolinite (fornito dal sig. A. Krantz di Bonn) venne convenientemente attaccato con acido fluoridrico. Il miscuglio risultante, contenente il fluosilicato d'Yttrio con un po' di fluosilicato di Cerio ecc., lavato e seccato a 100°, si riscaldò per circa 25 ore a b. m. con una soluzione concentrata di acido ossalico.

Si riprese con acqua, e il residuo dopo lavaggio si seccò a 100°. Esso non conteneva più che traccie di fluore e constava principalmente di ossalati. Gr. 0,5 di tale residuo consumarono c. c. 70,3 di permanganato $^{n}/_{10}$.

Non si esclude naturalmente che il consumo del permanganato possa essere in piccola parte dovuto anche all'ossidazione di qualche corpo che da una forma inferiore di combinazione passi alla superiore, come per es. per i sali cerosi.

Più importante in specie dal punto di vista della chimica analitica, ci sembra il descrivere il comportamento di alcuni composti fluorurati naturali, quando estremamente divisi vengano per qualche tempo riscaldati a b. m. in presenza di una soluzione acquosa concentrata e in eccesso di acido ossalico.

Gr. 3 di criolite di Evigtok (Arksut Fjord, West-Grönland), polverizzati e passati al setaccio a 5000 maglie per cm. q., si riscaldarono per circa 12 ore a b. m. con una soluzione concentrata di gr. 5,4 di acido ossalico (nel rapporto di $Al Fl^3 . 3Na Fl$ per $3C^2 O^4 H^2 . 2H^2O$), naturalmente riaggiungendo a piccole quantità l'acqua a mano a mano che evaporava.

Dopo le prime 12 ore di riscaldamento, si aggiunsero, per affrettare la reazione altri 5,4 gr. di acido ossalico.

Dopo circa altre 30 ore di riscaldamento lo sviluppo dell'acido fluoridrico era assai diminuito. Riprendendo con acqua e filtrando rimasero solo traccie di residuo. La soluzione venne concentrata a b. m. Dalla prima cristallizzazione si ebbero gr. 2,50 circa di cristalli fini, che erano di ossalato acido di sodio. Infatti:

Gr. 0,3086 di sostanza consumarono c. c. 47,5 di permanganato $^{n}/_{10}$ e gr. 0,122 diedero dopo calcinazione gr.0, 4956 di $Na^2 CO^3$ quindi per 100 p.

	Trovato	Calcolato da $HNa C^2 O^4 . H^2O$
$= C^2 O^4$	67,72	67,69
$Na^2 Co^3$	40,62	40,76

Dalla seconda cristallizzazione si ottenne dell'acido ossalico contenente *piccole quantità di fluoruro di sodio.* Rimase finalmente come residuo una sostanza siropposa, che a freddo cristallizzò in scaglie madreperlecee deliquescenti, risultanti di acido ossalico, allumina e soda. La presenza del fluoruro di sodio, che riscontrammo nei prodotti della 2ª cristallizzazione, ci potrebbe far supporre che nella decomposizione della criolite il primo a decomporsi sia il fluoruro d'alluminio poi quello di sodio. Tale ipotesi, oltre che è avvalorata da considerazioni teoriche, riguardanti l'affinità de' corpi tra loro, lo sarebbe anche dalla seguente esperienza:

Se si fa passare una corrente di vapor d'acqua sopra della criolite finamente polverizzata, contenuta entro una navicella di platino, collocata in una canna di ferro, mantenuta al rosso vivo, la criolite si decompone con formazione de' rispettivi ossidi e sviluppo di acido fluoridrico. La reazione presenta nettamente due fasi, che si distinguono dalla quantità di acido fluoridrico sviluppantesi in un dato tempo. In principio e per un certo tempo lo sviluppo è, relativamente parlando, abbastaaza rapido ed abbondante poi diviene lentissimo e in assai piccole quantità. Se a questo punto si prende il residuo, si tratta con acqua, questa diventa alcalina ed asporta grandi quantità di fluoruro di sodio; resta indietro un miscuglio di allumina e di pochissima criolite inattaccata. Ciò che prova che nella 1ª fase l'acqua decompone al rosso la criolite in allumina, fluoruro di sodio e acido fluoridrico. Nella 2ª fase il vapor d'acqua attacca anche il fluoruro di sodio (ciò che provammo con esperienza diretta) ma assai lentamente.

Gr. 7 di Triplite dello Schlackenwald, finamente polverizzati, si riscaldarono per circa 25 ore a b. m. con gr. 10,5 di acido ossalico in soluzione acquosa concentrata. Ben presto cominciò lo sviluppo di acido fluoridrico, e il miscuglio cangiò d'aspetto aumentando di volume e prendendo una tinta verde giallastra. Per affrettare la reazione, si aggiunse verso la fine altro acido ossalico.

Quando lo sviluppo dell'acido fluoridrico cessò, si riprese il tutto con acqua e si filtrò. La soluzione conteneva acido ossalico, del ferro allo stato ferrico, piccole quantità di manganese e rilevanti di acido fosforico. Il residuo seccato a 100° pesava circa 8 gr., era bianco con lieve tinta giallo verdastra e risultava di ganga inattaccata, di ossalato ferroso, di molto ossalato manganoso, di traccie di ossalato di calcio e di traccie di fluore. Gr. 0,5 di questo residuo consumarono c. c. 49 di permanganato $^{n}/_{10}$, mentre gr. 0,5 del campione primitivo di triplite non ne consumava che c. c. 7,5 (per il suo sale ferroso).

Importa finalmente notare che la mica di litio fluorifera non viene attaccata così com'è dall'acido ossalico, come neanche dall'acido solforico. Però, dopo fusa al cannello e ridotta in polvere fina, viene attaccata con sviluppo di acido fluoridrico dalla soluzione acquosa di acido ossalico per riscaldamento a b. m.

2. *Azione dell' acido tartarico su fluosali e fluossisali.*

Anche l' acido tartarico in soluzione acquosa, benchè assai meno energicamente dell' acido ossalico, decompone molti fluo- e fluossisali. Così dopo circa 3 giorni di riscaldamento gr. 2,19 di fluosilicato potassico vennero completamente decomposti con formazione di tartrato acido di potassico.

Di gr. 2 di criolite, trattati con un eccesso di acido tartarico in soluzione concentrata, dopo otto giorni erano decomposti gr. 1,20 e il liquido conteneva sale di alluminio e di sodio.

Matematica. — *Sui poliedri deformabili.* Nota di P. Pizzetti, presentata dal Socio Beltrami.

1. Consideriamo una superficie poliedrica non come limite di un solido, ma come forma di una scatola a pareti piane infinitamente sottili, della quale le faccie siano di forma invariabile, mentre gli angoli diedri possono variare entro quei limiti che sono compatibili colla invariabilità delle faccie.

Non è difficile immaginare esempî di superficie poliedriche deformabili, finchè almeno si considerano superficie *aperte*. Ne daremo qualche esempio al termine di questa Nota.

Rispetto ai poliedri deformabili è possibile, con metodi di Geometria elementare, stabilire alcuni teoremi che hanno riscontro in altri ben noti nella teoria delle superficie. Scopo di questa Nota è di porre in evidenza tali teoremi, dai quali quelli relativi alle superficie discendono, in modo elementare, quando si consideri il numero delle faccie del poliedro crescente all' infinito.

2. Premettiamo alcuni principî intorno alle aree limitate da un poligono sferico.

a) Se A, B, C sono gli angoli interni di un triangolo sferico, del quale due lati almeno siano minori di mezza circonferenza, detta S la superficie racchiusa dal triangolo si ha, dalla Geometria elementare:

$$A + B + C = \pi + S, \tag{1}$$

il raggio della sfera essendo 1.

b) Chiamiamo *positiva* l' area (minore di mezza sfera) racchiusa da un triangolo sferico ABC, quando essa giace a destra di chi percorre il contorno nel senso ABC. Sia AB un arco di cerchio massimo sul quale sia fissata una direzione positiva (AB); segniamo gli archi di cerchio massimo ($< \pi$) che uniscono A e B con un punto fisso O, e chiamiamo θ, θ' gli angoli che

l'arco AB e il suo prolungamento oltre B fanno risp. cogli archi AO, BO. Questi angoli si intendono contati positivamente da AO (o da BO) girando da sinistra verso destra fino ad AB (o al suo prolungamento). Chiamiamo poi ω l'angolo di cui gira l'arco ($< \pi$) uscente da O per passare da OA in OB, mentre la sua estremità percorre l'arco AB; ω sarà contato come positivo se la rotazione ha luogo da sinistra verso destra, negativo nel caso opposto; e finalmente sia S l'area (positiva o negativa secondo la fatta convenzione) chiusa dal triangolo OAB. È facile vedere che ω ed S avranno sempre ugual segno e che la relazione (1) dà in ogni caso

$$S = \omega + \theta' - \theta, \tag{2}$$

dove ben inteso si tenga conto dei segni di ω e S nel modo che si è detto.

c) È da osservare che, restando fisso l'arco AB e spostandosi in modo continuo il polo O, l'area S varia con continuità fino a che il punto O non attraversa il cerchio massimo cui appartiene l'arco AB. Diciamo *antipodo* dell'arco AB, l'arco A_1B_1 luogo dei punti della sfera diametralmente opposti a quelli di AB. È facile verificare che il valore di S *subisce un salto di* 4π *quando il polo* O *attraversa l'antipodo* [1], mentre varia con continuità intorno a *zero*, quando O attraversa il cerchio massimo fuori dall'antipodo. Quanto ad ω, θ, θ', essi possono anche subire variazioni discontinue, ben facili a trovarsi, ma che qui non c'interessa di indicare. La relazione (2) resta in ogni caso verificata.

d) Consideriamo ora sulla sfera un poligono chiuso di cui i lati siano archi di cerchio massimo, e sia stabilito un senso positivo sul contorno. Indichiamo i vertici con $1, 2, 3 \ldots n$, e, assunto un polo O ad arbitrio, siano, pel lato $(r, r+1)$, θ_r, θ'_{r+1} i valori degli angoli θ, θ' definiti come sopra. Chiamiamo *angolo esterno* (r) quell'angolo, minore di due retti, del quale deve girare il prolungamento del lato $(r-1, r)$ per coincidere col $(r, r+1)$. Riterremo (r) positivo quando la rotazione si compia da sinistra verso destra. Si avrà:

$$(r) = \theta_r - \theta'_r$$

oppure

$$(r) = \theta_r - \theta'_r \pm 2\pi$$

a seconda che nella ora detta rotazione si incontra o no l'arco (r)O. La somma delle relazioni analoghe alla (2) e relative ai varî lati del poligono dà pertanto

$$\Sigma S = 2k\pi - \Sigma(r) \tag{3}$$

[1] E precisamente S varia da -2π a $+2\pi$ quando il passaggio avviene da sinistra a destra di chi percorra l'antipodo nel senso A_1B_1.

dove k è un numero intero positivo, nullo o negativo. Questa formola dimostra che, allo spostarsi del polo O, la S non può variare se non in modo discontinuo. Ma d'altra parte, per ciò che si è detto, tali variazioni discontinue non possono essere altro che di $\pm 4\pi$ per volta. Ne segue che se la ΣS (ossia la superficie generata dall'arco $< \pi$ che gira intorno ad O percorrendo colla sua estremità il poligono) vien detta *area* del poligono sferico, *tale area non potrà, al variare del polo, assumere altro che un numero finito di valori, differenti fra loro di uno o più multipli di* 4π.

Nel caso di un poligono non intrecciato, questi valori sono due soltanto che, indicati con Σ_1 e Σ_2 (¹), e supposto $\Sigma_1 > \Sigma_2$, dànno $\Sigma_1 - \Sigma_2 = 4\pi$. Si ottiene il primo piuttosto che il secondo di questi valori, a seconda che il polo O si trova a destra piuttosto che a sinistra del contorno del poligono *antipodo* di quello dato.

Nel caso di un poligono intrecciato, si può mediante opportuni tagli nei punti d'incrocio del contorno, decomporre il poligono in r poligoni a contorni semplici e indipendenti fra loro. L'area ΣS sarà allora la somma delle quantità analoghe relative ai singoli poligoni semplici, e potrà quindi assumere $r+1$ valori diversi, i quali, indicando con Σ il più grande di tutti, saranno Σ, $\Sigma - 4\pi$, $\Sigma - 8\pi$, ... $\Sigma - 4r\pi$.

E finalmente se nella valutazione dell'area ΣS facciamo astrazione, come faremo per ora, da multipli della intera superficie sferica, possiamo concludere dalla (3) che l'area di un poligono sferico, definita come sopra, è indipendente dalla posizione del polo.

e) Supponiamo ora che, restando fisso il polo O, il poligono sferico si deformi in modo continuo. I due membri della (3) subiranno variazioni continue dovute al variare degli elementi del poligono, più quelle variazioni discontinue che saranno dovute al passaggio di qualche lato del poligono antipodo pel polo. Ma tali variazioni discontinue non possono essere che di $\pm 4\pi$. Ne segue che, trascurando come si è detto i multipli di 4π *l'area di un poligono sferico non varia quando esso si deformi con continuità in guisa che i suoi angoli esterni restino inalterati*, e, beninteso, i lati siano sempre archi di cerchio massimo.

3. Considereremo superficie poliedriche per ogni spigolo delle quali passino non più di due faccie ed ogni spigolo congiunga due soli vertici. Distinguiamo, in modo arbitrario, coi nomi di *esterna* ed *interna* le due bande opposte dello spazio che immediatamente aderisce alle pareti della scatola poliedrica, e per ogni faccia diciamo *direzione positiva della normale* quella che va dall'interno all'esterno, e *direzione positiva della rotazione* quella che va da sinistra a destra di un osservatore esterno.

Posto che la superficie poliedrica si deformi nel modo detto al § 1, noi terremo conto soltanto di quelle deformazioni che avvengono con continuità;

(¹) Sono, in valore assoluto, le due porzioni di superficie sferica, divise dal poligono.

escluderemo pertanto quelle alterazioni di forma che possono ottenersi soltanto tagliando la superficie secondo uno o più spigoli e rimarginandoli poi.

4. Sia una porzione di superficie poliedrica limitata dalla linea poligonale *a b c* ... Indichiamo ordinatamente con 1 , 2 , ... *n* le faccie che hanno *uno* o *più vertici sulla linea a b c* ..., e che costituiscono quella che chiameremo *striscia contorno*. La numerazione delle faccie sarà fatta in guisa che chi le percorra nel senso dei numeri crescenti abbia a sinistra la linea limite. Sugli spigoli 12 , 23 , ... che separano le faccie di contorno sceglieremo come direzione positiva quella che va dalla linea limite verso l' interno (fig. 1). Sopra la sfera di raggio 1 i punti (1), (2) (3) ... rappresentino le direzioni delle normali alle faccie 1 , 2 , 3 , ... e i punti (12) (23) ... quelle degli spigoli 12 , 23 , ... Uniamo il punto (1) col punto (2) con quell' arco di cerchio massimo (1) (2) che dal punto (12) è visto percorso da sinistra verso destra; e così facciamo per le altre coppie successive (2) (3), (3) (4), ..., (*n*) (1). Otterremo un poligono sferico, del quale l' area, definita come sopra, si dirà *flessione totale della porzione considerata di superficie poliedrica.*

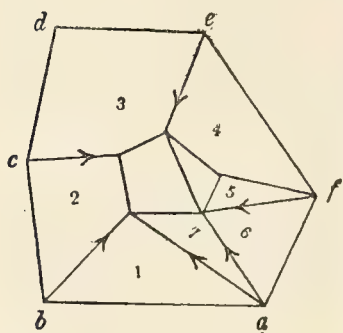



Fig. 1.

Colle convenzioni fatte è chiaro che l' angolo esterno (2) del poligono sferico non è altro che l' angolo, minore di due retti, di cui deve rotare, sulla faccia 2, lo spigolo (12) per riuscir parallelo e di ugual senso dello spigolo (23), purchè si tenga conto del segno di questa rotazione come si è detto al § 3.

È chiaro ora che se il poliedro si deforma con continuità, ed in modo che le faccie non variino, gli angoli esterni del poligono sferico resteranno inalterati e quindi la *flessione totale di una porzione qualsiasi di esso poliedro resterà invariata.*

5. Si immagini tracciata sulla striscia contorno della considerata porzione di poliedro una poligonale $l_1 l_2 \ldots l_n$ avente i vertici sugli spigoli 12 , 23 ... Chiamiamo β_r , β'_r (fig. 2) gli angoli che il lato l_r ed il suo prolungamento fanno cogli spigoli $(r-1, r)$, $(r, r+1)$ risp. Chiameremo *flessione geodetica* della poligonale nel vertice $(r, r+1)$ la differenza $\beta'_r - \beta_{r+1}$ o, ciò che è lo stesso, l' angolo che il prolungamento di l_r fa con l_{r+1}, quando la faccia (r) sia ribaltata sulla $(r+1)$; angolo il cui segno è stabilito nel solito modo. *Flessione*

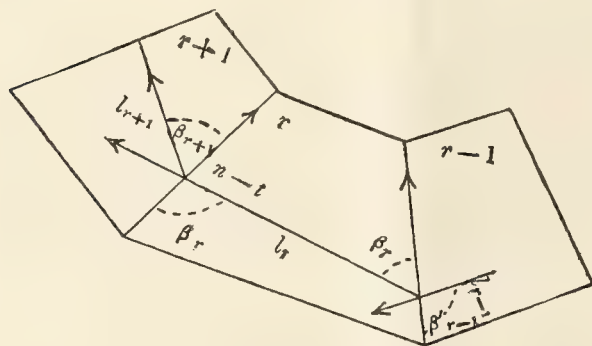



Fig. 2.

geodetica di tutta la poligonale sarà la somma delle flessioni geodetiche nei singoli vertici. È facile vedere che, in ogni caso,

$$\beta'_r - \beta_r$$

è l'angolo (positivo o negativo, minore di due retti) di cui deve rotare lo spigolo $(r-1, r)$ per riuscir parallelo a $(r, r+1)$; ossia, per quel che si è detto, $\beta'_r - \beta_r$ è l'angolo esterno (r) del poligono sferico che rappresenta la striscia contorno.

Quindi, chiamando Σ la flessione totale della superficie, Φ la flessione geodetica totale della linea l, e ricordando la formola (3), avremo

$$\Sigma = 2k\pi - \Sigma(\beta'_r - \beta_r) = 2k\pi - (\beta'_1 - \beta_2) - (\beta'_2 - \beta_3) - \cdots - (\beta'_n - \beta_1)$$

ovvero:

$$\Sigma = 2k\pi - \Phi \tag{4}$$

dove k è o nullo oppure un intero positivo o negativo. La effettiva misura della Φ può ottenersi così: Si separi la striscia contorno dal resto della superficie e poi la si tagli lungo una linea t giacente p. es. nella faccia (1), e la si distenda sopra un piano, in guisa che ogni faccia r, per adagiarsi sulla consecutiva $r+1$, ruoti positivamente rispetto alla direzione positiva dello spigolo $(r, r+1)$. Siano l'_1, l''_1 le posizioni assunte sul piano dai due pezzi in cui il lato l_1 è stato diviso dalla t. La Φ non è altro che la somma algebrica degli angoli *esterni* della poligonale sviluppata, percorsa a partire da l'_1 per arrivare ad l''_1; ove per valutare questi angoli esterni deve tenersi la stessa regola data nel § 2 per gli angoli esterni di un poligono sferico.

6. Poniamo che il poligono sferico, corrispondente ad una data porzione di superficie poliedrica, non sia intrecciato. In tal caso si può con un'opportuna convenzione stabilire il valore del coefficiente k nella formola (5). Intanto, il poligono non essendo intrecciato, alla Σ possono attribuirsi soltanto due valori Σ_1, Σ_2 differenti fra loro di 4π. Sceglieremo l'uno piuttosto che l'altro dei due nel modo seguente. Immaginiamo deformati con continuità angoli e faccie del poliedro in guisa che la porzione considerata si riduca tutta in un piano. Questa deformazione potrà, in infiniti modi, eseguirsi in guisa che il poligono sferico resti costantemente non intrecciato; una delle due regioni Σ_1, Σ_2 si annullerà al limite mantenendosi sempre positiva o sempre negativa. Assumiamo come misura della flessione totale Σ quella delle due aree Σ_1, Σ_2, che si riduce a zero col modo di deformazione ora detto. E poichè al limite $\Sigma = 0$, $\Phi = 2\pi$, così il valore di k nella (4) sarà 1. D'altra parte, colla detta deformazione Σ e Φ variano con continuità; quindi $k = 1$ sempre e la (4) diverrà

$$\Sigma = 2\pi - \Phi\,. \tag{5}$$

Il caso di una superficie curva a curvatura ovunque positiva e quello della superficie a curvatura ovunque negativa possono dedursi appunto dal caso della superficie poliedrica, per ogni porzione della quale il poligono sferico non riesce intrecciato. Basta supporre crescente senza limite, secondo una determinata legge, il numero delle faccie del poliedro. La relazione (5) diventa allora la nota relazione fra la curvatura totale di una porzione di superficie e la curvatura geodetica totale del contorno. La Φ è l'integrale della curvatura geodetica del contorno, aumentato (se questo contorno presenta dei vertici) della somma degli angoli esterni, da contarsi positivamente o negativamente, secondo i casi, colla solita regola.

Così per un triangolo geodetico ABC il cui contorno, secondo la convenzione del § 4 s'intende percorso in modo da avere a destra l'area da esso racchiusa, detti A, B, C gli angoli interni, si ha

$$\Phi = \pi - A + \pi - B + \pi - C$$

e la (5) conduce alla nota relazione

$$\Sigma = A + B + C - \pi$$

dove, s'intende, Σ sarà positiva o negativa secondo che la superficie è a curvatura positiva o a curvatura negativa.

7. Tornando alla poligonale considerata nel § 5, chiamiamo $\pi - \gamma$ l'angolo dei due lati l_1, l_2; e siano A_1, A_2 gli angoli che il piano $l_1 l_2$ fa colle faccie (1) (2) rispettivamente, e $\pi - (12)$ l'angolo diedro fra queste due faccie. La formola di Delambre

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

applicata al triedro che ha per spigoli i lati l_1, l_2 e la costola (12) dà

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}(A_1+A_2) = \cos\tfrac{1}{2}(12)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\beta'_1-\beta_2) \tag{6}$$

relazione che lega l'angolo in un vertice della poligonale colla corrispondente flessione geodetica. Quando il numero delle faccie cresca all'infinito in modo che il poliedro si trasformi in una superficie curva, allora $\frac{1}{2}(A_1+A_2)$ diventa l'angolo che il piano osculatore alla linea l fa col piano tangente alla superficie mentre cos (12) diventa uguale all'unità, e la (6) conduce alla ben nota relazione fra la curvatura geodetica e la curvatura ordinaria.

8. Vediamo ora alcuni esempî semplici di superficie poliedriche deformabili.

Senza fermarci al caso più semplice della piramide aperta con numero di faccie maggiore di 3, considereremo due casi:

a) Una superficie poliedrica aperta a faccie triangolari. Se S, V sono ordinatamente i numeri degli spigoli e dei vertici e se C è il numero degli spigoli del contorno è facile dimostrare che

$$S = 3V - C - 3 .$$

Ora per collegare fra loro rigidamente V punti nello spazio occorrono $3V-6$ linee, quindi se $C>3$, gli angoli diedri della superficie poliedrica sono deformabili in infiniti modi.

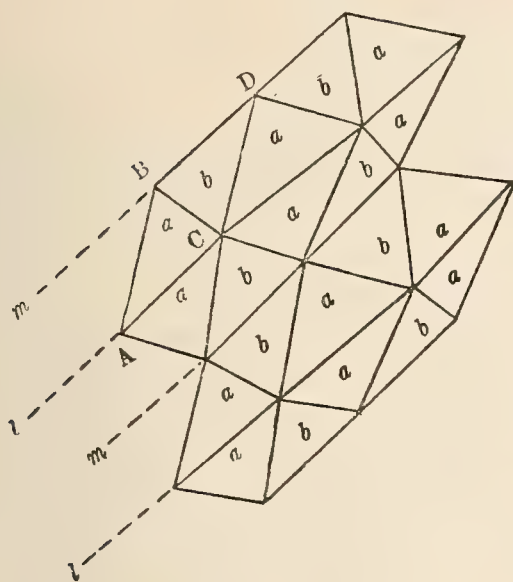



Fig. 3.

Consideriamo p. es. il reticolato indicato nella fig. 3, dove i triangoli indicati con a son tutti eguali, e così pure quelli b. I lati sulle linee l si suppongono più lunghi di quelli sulle m, in modo che la rete non è distendibile sopra un piano. È chiaro che una delle spezzate l può, salve certe limitazioni, essere inscritta in una qualunque *elica cilindrica* L; le altre spezzate l ed m restano allora inscritte in eliche coassiali e di egual passo. Poniamo infatti

$$AB=d\ ,\ BC=\delta\ ,\ AC=l\ ,\ BD=\lambda$$

e diciamo $r\,,\varrho$ i raggi delle eliche sulle quali si vogliono inscrivere le spezzate $l\,,m$ risp., $2\pi k$ il loro passo, ω l'angolo fra i piani assiali di A e C, φ quello fra A e B, h la proiezione del segmento AB sull'asse comune delle eliche. La condizione d'invariabilità dei segmenti $d\,,\delta\,,l\,,\lambda$ conduce alle seguenti equazioni:

$$(a)\qquad l^2=4r^2\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{2}+k^2\omega^2 \qquad\qquad (b)\qquad \lambda^2=4\varrho^2\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{2}+k^2\omega^2$$

$$(c)\qquad d^2=\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos\varphi+h^2$$

$$(d)\qquad \delta^2=\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\varphi-\omega)+(h-k\omega)^2.$$

Scelti a piacere gli elementi $r\,,k$ dell'elica L e dedotto ω dalla (a), la (b) dà ϱ, e quindi le (c) e (d) dànno φ ed h. Occorre evidentemente che $k\omega$ risulti minore di λ per poter avere ϱ dalla (b). La condizione poi perchè dalle (c) e (d) possano dedursi valori reali di φ e h può geometricamente enunciarsi così: « inscritto il segmento $l=AC$ nell'elica L, si immagini tracciata la circonferenza luogo dei punti che distano da A e C di d e δ risp.; è necessario e sufficiente che la minima distanza di questa circonferenza dall'asse dell'elica sia non $<\varrho$ ».

In particolare si può scegliere $k=0$, ossia inscrivere le linee $l\,,m$ entro circonferenze coassiali. Le precedenti equazioni diventano allora:

$$(a')\qquad l=2r\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\quad,\quad \lambda=2\varrho\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}$$

$$d^2=\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos\varphi+h^2$$

$$(d')\qquad \delta^2=\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\varphi-\omega)+h^2$$

dalle quali si deduce

$$(b') \qquad \varrho = r\frac{\lambda}{l} \qquad\qquad d^2 - \delta^2 = 4\varrho r \,\text{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right) \text{sen}\,\frac{\omega}{2} \qquad (c')$$

Scelto r, dalle $(a')\,(b')\,(c')\,(d')$ si dedurranno ordinatamente $\omega, \varrho, \varphi, h$.

Fig. 4.

b) Come secondo caso notevole consideriamo una superficie poliedrica a faccie trapezio-isosceli inscritta in una superficie di rotazione. Essa può esser deformata in guisa da riescire inscritta in infinite altre superficie di rotazione.

Siano infatti (fig. 4) $d_1, d_2, d_3 \dots$ i lati paralleli dei trapezi; $r_1, r_2, r_3 \dots$ i raggi dei paralleli nei quali essi sono risp. inscritti; h_{12} la distanza fra i piani dei paralleli r_1, r_2 e simili; ω l' angolo fra i piani meridiani che comprendono i lati $d_1, d_2, \dots$; δ_{12} il lato obliquo fra d_1 e d_2. Avremo le condizioni

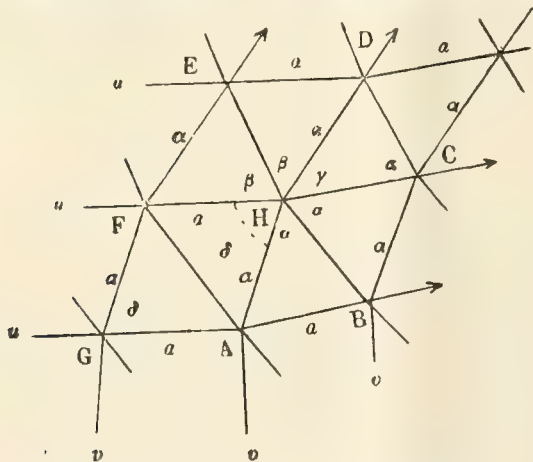
$$d_1 = 2r_1 \,\text{sen}\,\frac{\omega}{2} \quad , \quad d_2 = 2r_2 \,\text{sen}\,\frac{\omega}{2} \,, \dots$$

$$\delta_{12}^2 = (r_1 - r_2)^2 + h_{12}^2 \,, \dots$$

Scelto a piacere r_1, tali equazioni dànno successivamente $\omega, r_2, r_3 \dots h_{12}, h_{13} \dots$; la libertà di scelta del valore di r_1 resta naturalmente limitata soltanto dalla condizione che risultino reali i valori di $h_{12}, h_{23} \dots$

Fig. 5.

9. Interessa di vedere, con un esempio semplice, come, dalla considerazione di speciali superficie poliedriche, si possano dedurre talune delle note espressioni della *misura di curvatura* delle superficie in coordinate curvilinee.

Sia una superficie poliedrica a faccie triangolari isosceli; sulle linee u e v i lati son tutti uguali ad a; il terzo lato è variabile comunque. Applicando la regola data al § 4, la flessione totale della porzione ABCDEF è, secondo le notazioni della figura

$$\Sigma = 2\pi - 2\alpha - 2\beta - \gamma - \delta = (\pi - 2\alpha - \delta) - (\gamma - \pi + 2\beta)$$

che può evidentemente scriversi

$$(m) \qquad \Sigma = \widehat{HAB} - \widehat{FGA} - (\widehat{DHC} - \widehat{EFH})$$

Se ora si suppongono decrescenti senza limite i lati dei triangoli, si ottiene una superficie divisa in rombi infinitesimi delle linee u e v, alle quali, riferendo come a coordinate i punti della superficie, il quadrato dell'elemento lineare assume la forma

$$(n) \qquad ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos\omega ,$$

essendo ω l'angolo variabile fra le coordinate. Ora il secondo membro della (m) può scriversi, per a infinitesima,

$$(p) \qquad a\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)_{G} - a\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)_{F} = -\,a^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right).$$

Questa, divisa per l'area elementare della superficie, dà la misura della curvatura. L'area della porzione ABCDEF, è $3a^2 \operatorname{sen}\omega$, a meno di infinitesimi d'ordine sup. al 1°, ma è chiaro che *un terzo* soltanto di questa deve assumersi come divisore della curvatura. Poichè, se per una regione finita si fa la somma delle aree esagonali circondanti ogni punto, si ottiene evidentemente tre volte l'area della regione. Avremo quindi la misura della curvatura espressa da

$$C = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}$$

che è appunto l'espressione della misura della curvatura quale è data dalla teoria delle coordinate curvilinee, in corrispondenza alla forma (n) dell'elemento lineare.

Considerando una superficie poliedrica a faccie triangolari qualunque, si otterrebbe, senza molto maggiore difficoltà, la espressione della curvatura in coordinate curvilinee qualunque, sotto una delle note forme di Liouville.

Chimica-fisica. — *Il bromuro stannico come solvente nelle determinazioni crioscopiche* [1]. Nota di Felice Garelli, presentata dal Socio Ciamician.

Fra i numerosi solventi fin qui impiegati nelle determinazioni crioscopiche ben pochi appartengono ai composti inorganici. Dopo l'acqua infatti non furono adoperati che l'ipoazotide [2], il cloruro di iodo [3] nelle due

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della Libera Università di Ferrara.

[2] Ramsay, Zeitschrift für phys. Chemie, vol. V, pag. 224.

[3] Van't Hoff, Berichte 1894, pag. 14, e Stortenbeker, Zeitschrift für phys. Chemie, vol. III, pag. 11 e vol. X pag. 3.

modificazioni α e β, il fosforo (1), taluni metalli fondenti a bassa temperatura (2), l'acido solforico monoidrato (3), corpi tutti che non si possono certo riguardare come solventi di uso pratico, ed ai quali solo in qualche caso si dovette ricorrere per risolvere interessanti problemi.

Sono da menzionarsi ancora le esperienze di Löwenherz sul solfato sodico cristallizzato, quelle di van't-Hoff e H. M. Dawson (4) sul cloruro di magnesio pure cristallizzato dalle quali si vide che i sali idrati fusi, adoperati come solventi, si comportano nel congelamento come le sostanze semplici. Ciò indurrà forse ad impiegare in crioscopia come solventi un certo numero di corpi inorganici che, anidri, non possono servire all'uopo pel loro punto di fusione quasi sempre elevatissimo.

L'acqua adunque rimaneva fino ad ora l'unico solvente inorganico di uso pratico, al quale dovevasi ricorrere per determinare i pesi molecolari col metodo crioscopico.

In un opuscolo di F. M. Raoult pubblicato nel 1889 col titolo: *Sur les progrès de la Cryoscopie*, si trova appena menzionato un altro solvente inorganico che mi parve degno di studio, e questo è il bromuro stannico il quale non è più ricordato in nessun altra pubblicazione dello stesso autore.

L'illustre scienziato francese, al quale mi rivolsi per avere notizie dettagliate su tali ricerche, con squisita cortesia, della quale vivamente lo ringrazio, mi comunicò tosto d'aver effettivamente impiegato nel 1886 il bromuro stannico eseguendo due sole determinazioni crioscopiche con lo sciogliervi del benzolo e dell'acido acetico, ottenendo i seguenti risultati:

concentrazione	abbassamento del punto di congelazione	coeff. d'abbass.	costante
	Benzolo		
1,154	3°,60	3°,119	243
	Acido acetico		
1,064	1,90	1,81	108,6

Il bromuro stannico adoperato da Raoult, e ch'egli stesso si era preparato, fondeva a 26°,4; a temperatura cioè alquanto inferiore a quella cui fonde il sale puro. Il Raoult mi confermò inoltre di non aver più nulla pubblicato su questo argomento.

Volli riprendere lo studio di questo solvente perchè speravo ch'esso mi fornisse il modo di realizzare anche fra i corpi inorganici qualcuno di quei casi tipici di soluzioni solide scoperti, in numero già notevole, specialmente fra i composti organici a catena chiusa.

(1) Helff, Zeitschr. f. phys. Chemie, vol. XII, pag. 220.

(2) Heycok e Neville, Journal of the Chem. Soc. Trans. 1890, pag. 376-393 e 1892, 888, 914.

(3) Lespieau, Bull. Soc. Chimique 1894, vol. XI, pag. 74.

(4) Zeitschrift f. phys. Chemie, vol. XVIII, pag. 70 e vol. XXII, pag. 598.

Io mi aspettavo, infatti, che le soluzioni in bromuro stannico del tetracloruro e del tetraioduro del medesimo elemento, avrebbero separato nel congelamento una soluzione solida, e conseguentemente avrebbero dimostrato un comportamento crioscopico anormale.

La supposizione mi sembrava maggiormente giustificata dalle ricerche recenti di Bruni ([1]), il quale ha dimostrato che le soluzioni di cloroformio e di iodoformio in bromoformio e quelle del cloruro e del ioduro di etilene nel bromuro d'etilene congelando separano delle soluzioni solide, ed altresì da quelle di Rothmund ([2]) il quale trovò che il tetracloruro ed il tetrabromuro di carbonio sono isomorfi.

Queste previsioni invece non furono confermate dall'esperienza: ed inoltre ho ottenuto un comportamento crioscopico normale anche con le soluzioni di tetrabromuro e di tetracloruro di carbonio nel bromuro stannico.

Avrei voluto sperimentare anche le soluzioni dei derivati alogenati e sopratutto dei tetrabromuri di tutti quegli elementi che appartengono allo stesso gruppo dello stagno, ma non ho potuto fin ora procurarmi i composti necessari. È possibile, ad esempio, che il tetrabromuro di germanio abbia relazioni cristallografiche con quello di stagno e formi quindi con esso una soluzione solida.

Sono però lieto di aver iniziato queste ricerche, e credo utile comunicarle, benchè ancora incomplete, perchè l'esperienza mi ha persuaso che il bromuro stannico può essere, in molti casi, un solvente pregevolissimo e che il suo impiego in crioscopia non presenta quegl'inconvenienti, ch'io stesso dapprima credevo causassero gravi difficoltà sperimentali.

Questo corpo, di fatto, fuma all'aria, sublima a temperatura ordinaria ed attira l'umidità: tuttavia la sublimazione è insignificante, di gran lunga inferiore a quella di molti solventi organici, e lo si può fondere, agitare, travasare, senza che modifichi sensibilmente il suo punto di fusione.

Facendo poi arrivare nell'alto della provetta crioscopica una corrente d'aria secca, la principale causa d'errore viene eliminata e le determinazioni riescono esattissime.

Nelle mie esperienze ho sempre avuto questa precauzione: ma debbo dichiarare ch'essa non si può dire neppure assolutamente necessaria, giacchè ho osservato più d'una volta che, anche senza la corrente d'aria secca, il punto di congelamento del solvente, lasciato nella provetta crioscopica per parecchie ore, o non muta affatto, o tutt'alpiù scende di un centesimo di grado.

Il bromuro stannico si trova in commercio sufficientemente puro a basso prezzo e la temperatura alla quale esso fonde (30° C circa) non potrebbe essere più comoda. Infine la depressione molecolare costante elevatissima, che mi

([1]) Rendiconti di quest'Accademia, vol. VII, 1° sem., pag. 166.
([2]) Zeitschrift für phys. Chemie, XXIV, 705.

pare sia superata solo da quella del fosforo, costituisce un pregio notevolissimo di questo solvente, giacchè permette, volendo, di eseguire esattissime determinazioni di pesi molecolari anche con piccolissima quantità di solvente e con un termometro a bulbo piccolo diviso soltanto in decimi di grado.

Il bromuro stannico ch'io ho adoperato proveniva dalla ditta Kahlbaum e fondeva a 29°,10. È bianco, in massa cristallina e fuso fornisce un liquido perfettamente incoloro, fortemente rifrangente che nel solidificare si contrae moltissimo. Con una sola cristallizzazione frazionata ottenni un prodotto di purezza più che bastante, che fondeva a 29°,45 e ch'io adoperai senz'altro per le mie esperienze. Queste furono eseguite col solito apparecchio di Beckmann, privo di mantello d'aria e tenuto immerso in acqua la cui temperatura era di un grado circa al di sotto di quella del liquido da congelarsi. Per ogni volta dovetti impiegare circa 30 grammi di solvente, quantità necessaria per coprire interamente il grosso bulbo del mio termometro.

Ecco i risultati delle determinazioni crioscopiche.

Premetto che i composti liquidi, accuratamente purificati, furono ognora raccolti in palline tarate e queste successivamente introdotte nella provetta crioscopica. Il iodo fu pesato in piccolissimi tubetti.

concentrazione	abbass. termometrico	coeff. d'abbass.	abbass. molecolare costante
	Benzolo, $C_6H_6 = 78$		
0,7850	2°,485	3°,1660	247
	Acetofenone, $C_8H_8O = 120$		
0,3680	0°,75	2,0380	244,5
1,0670	2°,03	1,9025	228,3

La costante ottenuta concorderebbe quindi col valore trovato da Raoult impiegando il benzolo. Ma avendo visto che il liquido si colora in giallo e il valore della costante diminuisce rapidamente, non ho proseguito a fare ulteriori concentrazioni e cominciai a ritenere non troppo esatta la costante trovata con questi due corpi.

Con altri numerosi tentativi mi sono persuaso che solo certe determinate sostanze organiche (e specialmente i derivati alogenati) possono essere sciolte nel bromuro stannico senza che avvenga qualche reazione.

Bromuro d'etilene, $C_2H_4Br_2 = 188$

Fondeva a 10° e bolliva a 132°,5 a 763 mm.

concentrazione	abbass. termometrico	coeff. d'abbass.	abbass. molecolare costante
0,3417	0°,505	1,478	277,8
0,9402	1°,41	1,499	281,9
1,8650	2°,84	1,523	286,2
3,2080	4°,54	1,416	266,1

Cloruro d' etilene, $C_2H_4Cl_2 = 99$

Bolliva a 84° C. alla pressione di 759 mm.

0,7906	2°,20	2,7825	275,5
1,7490	4°,60	2,6362	261,0

Bromoformio, $CHBr_3 = 253$

Fondeva a 8°,5.

0,6260	0°,70	1,1183	282,9
1,9081	2°,06	1,0800	273,1
3,6875	3°,94	1,0685	270,3

Tetrabromuro di carbonio, $CBr_4 = 332$

Fu purificato cristallizzandolo dall' etere di petrolio.
Fondeva a 92° C.

0,4259	0°,355	0,8335	276,7
1,2722	1°,05	0,8332	276,6
2,252	1°,88	0,8349	277,2
3,368	2°,78	0,8255	274,2
5,863	4°,77	0,8137	270,2

Jodo, $I_2 = 254$.

0,2867	0°,35	1,2207	309,7
0,7346	0°,84	1,1435	290,1
1,1497	1°,30	1,1308	286,9
1,8605	2°,07	1,1127	282,3

Bromo, $Br_2 = 160$.

0,4253	0°,758	1,7820	2850
1,5165	2°,66	1,7541	280,5
2,7430	4°,66	1,6602	265,6

Facendo la media dei valori ottenuti con queste diverse soluzioni a concentrazioni prossime all' uno per cento, si ricava pel bromuro stannico una costante uguale a 280 circa. Propongo questo valore per calcolare i pesi molecolari. Solo il iodo a bassa concentrazione fornisce una costante notevolmente più elevata, che però diminuisce rapidamente col crescere della concentrazione. Questo comportamento del iodo trova riscontro in quello che lo stesso elemento dimostra in soluzione di bromuro d' etilene (1).

Il iodo è solubilissimo nel bromuro stannico e fornisce una soluzione di color violetto intenso. Il peso molecolare trovato corrisponde, come si vede,

(1) Beckmann e Stock, Zeitschrift phys. Chemie, vol. XVII, pag. 109.

alla formola J_2, come del resto si ebbe in tutti i solventi nei quali fino ad ora fu sperimentato. Lo stesso dicasi pel bromo.

Il tetrabromuro di carbonio ed il tetracloruro, come già dissi, fornirono valori normali. Per le ragioni note non potei sperimentare i composti del silicio e del germanio.

Il cloruro stannico ed il ioduro mi diedero i risultati seguenti:

Cloruro stannico, $Sn\,Cl_4 = 259,9$.

concentr.	abbass. termom.	coeff. d'abbass.	abbass. mol. costante	peso mol. K = 280
0,7659	1°,30	1,6971	441,2	165,0
1,5530	2°,57	1,6553	430,1	169,2
3,1126	4°,74	1,523	395,8	183,9

Joduro stannico, $Sn\ J_4 = 625,5$.

concentr.	abbass. termom.	coeff. d'abbass.	abbass. mol. costante	peso mol. K = 280
0,6791	0°,372	0,5478	342,6	511,2
1,5650	0°,857	0,5476	342,5	511,3
2,5285	1°,352	0,5347	334,5	523,5
4,1670	2°,017	0,4840	302,7	578,3
7,0100	3°,332	0,4753	297,3	589,1
0,8107	0°,430	0,5304	331,8	527,9
1,7465	0°,940	0,5383	336,7	520,2
2,7710	1°,470	0,5304	331,8	527,9

Come si vede, invece di ottenere con questi due composti una depressione molecolare minore della teorica, come avrei avuto nel caso di soluzione solida, ho ottenuto con ambedue una depressione maggiore. Pel cloruro stannico la divergenza dal valore teorico è molto grande e starebbe ad indicare una dissociazione del composto: tuttavia, per la difficoltà enorme di avere del cloruro stannico perfettamente anidro, non posso escludere che l'anomalia osservata sia dovuta a traccie di umidità penetrate in qualche modo nel composto o nel solvente: e ciò abbenchè io l'abbia distillato in corrente d'aria secchissima e racchiuso tosto in palline di vetro tarate.

Pel ioduro stannico, che è molto stabile e si può seccare perfettamente, l'anomalia è assai meno manifesta, ma ancora sensibile. Può darsi anche ch'essa sia dovuta in parte all'elevato peso molecolare del composto. Ad ogni modo è certo, che nel congelamento di queste due soluzioni non si ha il comportamento crioscopico anormale caratteristico della formazione di soluzione solida.

Ho poi eseguito una serie di esperienze con l'acido acetico ed una con l'acido butirrico, ed ho confermato l'osservazione comunicatami da Raoult: che cioè il bromuro stannico rispetto agli acidi si comporta come gl'idro-

carburi semplici e sostituiti. Anzi gli aggregati molecolari che si formano in soluzione di bromuro stannico sono anche più complessi.

Acido acetico, $C_2H_4O_2 = 60$.

concentr.	abbass. termom.	coeff. d'abbass.	abbass. mol. costante	peso mol. K = 280
0,3213	0°,705	2°,194	131,7	127,6
0,6807	1°,360	1,998	119,9	140,1
1,0240	1°,905	1,860	111,6	150,5
1,8266	2°,885	1,880	94,8	177,2
3,1340	3°,885	1,242	74,5	225,8

Acido butirrico, $C_4H_8O_2 = 88$.

0,4950	0°,77	1,555	136,8	180

Era da presumersi che analogo comportamento dimostrassero gli alcoli, i fenoli e tutti i corpi ossidrilati. Siccome però questi composti non si prestano ad uno studio dettagliato perchè o reagiscono col bromuro stannico o formano con essi prodotti d'addizione, così non riuscii che a fare una sola esperienza sull'alcool metilico.

Alcool metilico, $CH_3OH = 32$.

0,2740	1°,16	4°,233	135,5	66,1

Aggiungendo alla soluzione nuovo alcool metilico si osserva un intorbidamento ed il punto di congelazione non scende più.

Rimane a vedersi se la costante determinata con l'esperienza concorda con quella che si ricava dalla formola di van't Hoff. Raoult fece il calcolo ponendo il punto di fusione del bromuro stannico a 25° C, e il calore latente di fusione per un grammo uguale a 7,16 (1) e trovò 248.

Pel mio bromuro stannico, assai più puro e che fonde a 30° C circa, si ha invece

$$\text{Costante} = 0,02 \frac{(273 + 30)^2}{7,16} = 256,45$$

Questo valore, come si vede, si avvicina di più a quello trovato da Raoult e da me, impiegando il benzolo e l'acetofenone, che non a quello fornitomi da tutte le esperienze, molto più attendibili, eseguite con le altre sostanze.

Dopo le molteplici conferme che ha ricevuto la formola di van't Hoff, io credo lecito di ricercare, in questo caso come in altri, la ragione del disaccordo nella poca esattezza del valore 7,16 dato come calore latente di fusione del bromuro stannico. Calcolando con la formola di van't Hoff le calorie

(1) Ladenburg. Handwörterbuch der Chemie, vol. XIII, pag. 572.

di fusione, attribuendo alla costante di abbassamento il valore 280, si ottiene:

$$W = 0,02 \frac{(273 + 30)^2}{280} = 6.48$$

Notisi ancora che applicando la regola empirica di Raoult si trova un valore che quasi coincide con quello fornito dall'esperienza. Di fatto essendo 438 il peso molecolare del bromuro stannico, si ha:

$$\text{costante} = 438 \times 0,63 = 276,94.$$

Paleontologia. — *I Radiolari delle ftaniti titoniane di Cárpena presso Spezia.* — Nota di P. E. Vinassa de Regny, presentata dal Socio Capellini.

Sino dal 1883 il sen. Capellini comunicava alla Società geologica italiana il rinvenimento degli strati con Aptici nei dintorni della Spezia. Nelle numerose escursioni fatte dal mio illustre maestro alle varie località fossilifere, egli ebbe agio di raccogliere un ricco materiale, che si conserva adesso nel R. Istituto geologico di Bologna. Interposti agli strati ad Aptici stanno assai frequentemente diaspri rossicci e ftaniti chiare, di cui alcune sezioni svelarono al prof. Capellini la presenza di Radiolari.

" Per cortesia dell' ottimo professore potei vedere alcune di quelle preparazioni, e mi accorsi che nella ftanite chiara, che si trova a poca distanza dal paese di Cárpena, a nord-nord-est di M. Parodi, erano conservate numerose e belle forme di radiolari molto interessanti.

Raccolsi allora nuovo materiale di quella località, e preparai numerose altre sezioni, non così sottili come le prime, onde avere intatte le forme di dimensioni maggiori, seguendo in ciò il consiglio del Rüst. Mi trovai così in breve ad avere numerose forme, ottimamente conservate e distinte, che mi posi tosto a studiare con pazienza ed amore.

La fauna delle ftaniti titoniane di Carpena è una tra le più ricche che si conosca. Essa infatti ci presenta non meno di 109 forme, e si noti che non ho tenuto conto altro che delle forme determinabili con sicurezza. L'importanza di questa fauna non è certo grande dal punto di vista geologico, ma è notevole per la ricchezza delle forme, di cui alcune rappresentano generi viventi non ancora ritrovati fossili, altre invece ci danno esempio di generi oggi estinti, ma che rientrano però a completare in qualche parte il quadro, già maravigliosamente armonico, che dei Radiolari viventi ci ha dato il sommo Haeckel.

Sui Radiolari fossili del Paleozoico e del Mesozoico esistono importantissimi lavori, tra cui principali quelli del Rüst, di Dunikowsky, Zittel, Hinde,

Parona ecc. Tra questi lavori però eccellono per ricchezza di forme, chiarezza di descrizione ed esattezza di figure le tre Memorie del Rüst sui Radiolari del Lias (*Palaeontographica*, Bnd. 31), della Creta (Ibidem, Bnd. 34) e del Paleozoico e Trias (Ibidem, Bnd. 38) (1). Nell'ultimo di questi importanti contributi il Rüst dà uno specchio delle forme del Mesozoico, conosciute sino al 1892, le quali arrivano appena a 421; tra queste solo 232 forme appartengono al Giura. È da notare però a questo proposito come il Rüst abbia spesso errato nella determinazione dei piani, essendosi egli limitato a studiare le forme che rinveniva nei varî esemplari mandatigli dai diversi Musei. Così egli, ad esempio, considera giuresi i diaspri toscani, certamente eocenici, studiati dal Pantanelli, in ciò seguito anche da Haeckel (*Report on the Radiolaria collected by H. M. S. Challenger*; Zoology, vol. XVIII, pag. 1762) che nel riportare l'elenco delle forme, a suo parere incerte, dei diaspri toscani, aggiunge « probably Jurassic ». In altro errore assai grave sembra poi essere incorso il Rüst nel suo ultimo lavoro, in cui cita più di 60 forme, un quarto cioè di tutte quelle da lui studiate, come provenienti da un diaspro siciliano, che egli ascrive al Permocarbonifero. Avendo interrogato a questo proposito il dott. Di Stefano, egli, colla cortesia che lo distingue, mi rispondeva tosto che nel Permocarbonifero della Sicilia non esistono diaspri, e che in generale i pezzi di diaspro esportati, e tra questi è certo il pezzo che, senza indicazione di località, fu comunicato al Rüst dal Museo di Monaco, provengono dal Lias superiore e dall'Eocene.

Sarebbe perciò interessante di poter studiare nuovamente i diaspri siciliani e decidere finalmente da che terreno provengano le forme descritte dal Rüst come permocarbonifere. A parer mio le 8 forme che il Rüst vi trova a comune col Carbonifero dell'Harz non posson bastare a far credere tutta la restante fauna carbonifera, tanto più se si pensa che nella fauna, certamente titoniana e meno numerosa, da me studiata, sono pure 8 le forme che si riscontrano in terreni paleozoici. Anche se perciò si dovessero aggiungere quelle 60 forme siciliane alle 232 già conosciute, si arriverebbe nemmeno a 300 forme giuresi conosciute e la fauna delle ftaniti di Cárpena aumenta notevolmente questo numero, facendolo raggiungere quasi il 400.

La illustrazione completa della fauna vedrà, spero in breve, la luce, corredata dalle tavole necessarie in cui saranno raccolte tutte le figure eseguite accuratamente colla camera lucida a ingrandimento di 125 e 250 diametri; per adesso mi limito a dare un semplice elenco, facendolo però precedere dalla descrizione dei nuovi generi, che mi son trovato costretto a creare, dappoichè i limiti dei generi assegnati da Haeckel son così netti e precisi, che non ammettono l'elasticità, del resto possibile in altri tipi animali, meno regolarmente e fissamente geometrici dei Radiolari.

(1) Durante la stampa di questa Nota è comparso un nuovo lavoro del Rüst sui Radiolari mesozoici, di cui potrò solo tener conto nella mia prossima Memoria.

Gen. **Dorylonchidium** m. Sferidea caratterizzata dalla presenza di un solo aculeo e di due sfere reticolate concentriche. Esso si distingue dal genere *Dorysphaera* Hinde per la presenza di due sfere.

Gen. **Doryconthidium** m. Sferidea caratterizzata dalla presenza di un solo aculeo, come nel genere precedente, ma con tre sfere reticolate concentiche.

A proposito di questi due generi è da osservare che, seguendo Haeckel, le Sferidee viventi si distinguono in varie famiglie a seconda se hanno o, 2, 4, 6 o più aculei; queste famiglie poi si suddividono a seconda se hanno una sola sfera, 2, 3, 4 o più sfere concentriche. Mentre nelle forme viventi gli aculei, come abbiamo veduto, sono sempre in numero di 2, 4, 6 o più, nelle fossili sono comuni forme con un solo aculeo ed anche con tre aculei. Il primo ad accennare a questo fatto fu nel 1890 il Hinde, che descrisse i nuovi generi *Dorysphaera*, *Doryplegma* e *Dorydictyum* con un solo aculeo, e *Triposphaera* con 3 aculei; ma forme con un solo aculeo erano già state osservate, sotto altro nome, dal Dunikowski e dal Rüst. Abbiamo quindi da aggiungere alle famiglie di Haeckel una nuova che chiamerò

Fam. **Dorysphaerida** m. da interporsi tra la Fam. VI *Collosphaerida* Haeck. e la Fam. VII *Stylosphaerida* Haeck. A questa famiglia, caratterizzata dalla presenza di un solo aculeo, appartengono oggi i generi seguenti:

Dorysphaera Hinde. Con una sola sfera reticolata.

Dorylonchidium Vin. Con due sfere reticolate.

Doryconthidium Vin. Con tre sfere reticolate.

Dorydictyum Hinde. Con una sfera spugnosa.

Doryplegma Hinde. Con una sfera spugnosa ed una midollare reticolata [1].

Probabilmente anche una nuova famiglia sarà da crearsi per le forme munite di tre aculei, famiglia che potremmo dire delle **Triposphaerida**, e da interporsi tra la Fam. VII *Stylosphaerida* Haeck. e la Fam. VIII *Staurosphaerida* Haeck.

Sempre alle Sferidee e più specialmente alla Fam. X *Astrosphaerida*, leggermente modificata, appartiene un nuovo genere assai interessante per la sua corrispondenza col nuovo genere, proposto dal Dreyer, *Sphaeropyle*, sferidea a sfera unica munita di un'apertura rotonda più o meno ampia.

Gen. **Acanthopyle** m. Sferidea composta di una sola sfera con apertura circolare, ma adorna di numerosi aculei, irregolarmente disposti.

Gli altri due nuovi generi appartengono alla famiglia degli *Staurosphaerida*, che al solito si suddividono in varie sottofamiglie a seconda del nu-

[1] Forme con un solo aculeo furono accennate anche da Pantanelli e da Tedeschi; ma nel genere nominato dal Pantanelli sono comprese certamente forme disparatissime, e quello di Tedeschi è troppo insufficientemente descritto.

mero delle sfere. Nelle due prime sottofamiglie (con una o due sfere) si distinguono i generi a seconda che i 4 aculei sono tutti uguali, o uguali due a due oppure uno maggiore degli altri.

La terza sottofamiglia ha, tra i viventi, un solo rappresentante, il genere *Stauracontium*, con 4 aculei tutti uguali. Vi aggiungo adesso i due generi seguenti, già veduti dal Rüst, ma non nominati:

Gen. **Rüstia** m. [1]. Staurosferide con tre sfere reticolate concentriche, e 4 aculei diversi due a due. Vi appartengono *Rüstia inaequalis* Rüst sp. (*Stauracontium*) di Sicilia, e *R. elegantula* n. f.

Gen. **Xyphostaurus** m. Staurosferide con tre sfere reticolate concentriche e 4 aculei di cui uno più grande degli altri. Vi appartengono *Xyphostaurus xiphophorus* Rüst sp. (*Staùracontium*) del Harz e *X. tithonicus* n. f.

Con questi due nuovi generi anche la sottofamiglia degli *Stauracontida* offre una spiccatissima analogia colle prime due sottofamiglie, distinte solo pel numero delle sfere.

Ecco intanto l'elenco delle forme studiate:

Sphaerozoum sp. pl.
Cenosphaera gregaria Rüst
» *regularis* Rüst
» *minuta* Pant. sp.
» *minor* n. f.
» *major* n. f.
» *ligustica* n. f.
» *Haeckeliama* n. f.
» *regularissima* n. f.
Stigmosphaera tithoniana n. f.
Sphaeropyle macropyla n. f.
» *micropyla* n. f.
» *zonata* n. f.
» *entostoma* Rüst
Carposphaera valida Rüst
Carposphaera sp.
Liosphaera media n. f.
Thecosphaera siculà Rüst
Rhodosphaera sexactinia n. f.
» *elegans* n. f.
» *crassa* n. f.
Dorisphaera lanceolata n. f.
» *elegans* n. f.
Dorisphaera micropora n. f.
» *simplex* n. f.
» *major* n. f.
» *bomba* n. f.
Dorytictyum ligusticum n. f.
Dorylonchidium Hindei n. f.
» *globosum* n. f.
Doryconthidium Cayeuxi n. f.
Xyphosphaera Rüsti n. f.
Xyphostylus major n. f.
» *Paronai* n. f.
» *acutus* n. f.
Amphistylus Zitteli n. f.
Spongolonche cornuta n. f.
» *minima* n. f.
Staurosphaera antiqua Rüst
Staurolonche Pantanellii n. f.
» *minima* n. f.
Stauroxiphus elegans n. f.
Stauracontium perforatum n. f.
Xyphostaurus liasinus n. f.
Rüstia elegantula n. f.
Staurodoras Mojsisovicsi Dunik.

[1] Il vero nome per questo genere, onde seguire la regola Haeckeliana, sarebbe stato *Staurocontidium*; ma esiste già il genere *Staurachantidium* Haeck., e ad evitare confusioni preferisco dedicare il mio nuovo genere al valente scienziato tedesco.

Exastylus crassispina n. f.
Exastylarium Dunikowskyi n. f.
Acanthosphaera parvispina n. f.
Acantophyle Dreyeri n. f.
Cenellipsis ingens n. f.
" *crassa* n. f.
" *exagonata* n. f.
" *regularis* n. f.
" *oligopora* n. f.
Ellipsoxyphus oligoporus n. f.
Ellipsostylus obliquus Rüst.
Lithapium gutta n. f.
" *brachyceras* n f.
Pipettella Rothpletzi n. f.
Druppula meridiana n. f.
Lithatractus brevispinus Rüst
Spongurus plantaeformis Rüst
Cenodiscus sp.
Stylodiscus pala n. f.
Theodiscus sacerdotalis n. f.
Porodiscus simplex Rüst
Tripodictya elegantissima n. f.
Rhopalastrum unicum n. f.
Stauralastrum aculeatum n. f.
Spongodiscus irregularis n. f.
" *clarus* n. f.
Spongasteriscus? sp.
Zygocircus latus n. f.
Dystympanium carbonicum Rüst
Tripilidium triangulum n. f.
Carpocanistrum glolicephalum n. f.
Cyrtocalpis utriculus n. f.
Cyrtocalpis obovata n. f.
Sethocyrtis Perneri n. f.
Dictyocephalus major n. f.
Sethocapsa spinosa n. f.
Dicolocapsa nuda n. f.
Clathrocyclas tintinnabulum n. f.
Tricolocampe ligustica n. f.
" *inexpleta* n. f.
Theocampe regularis n. f.
Tricolocapsa globosa n. f.
Lithostrobus simplex n. f.
" *capulus* n. f.
Stichocorys turrita n. f.
Dictomitra ingens n. f.
" *tithoniana* n. f.
" *ligustica* n. f.
" *turricula* n. f.
" *oligopora* n. f.
" *exagona* n. f.
" *capulus* n. f.
" *globosa* n. f.
" *Capelliniana* n. f.
" *elegans* n. f.
Lithocampe splendida n. f.
Lithocampe macropora n. f.
" *multipora* n. f.
" *irregularipora* n. f.
" *spinata* n. f.
" *thiara* n. f.
Stichocapsa elongata n. f.
" *fusus* n. f.

In queste 109 forme ve ne sono solamente 13, le quali siano già state precedentemente ritrovate in altri terreni. Tra queste le più comuni sono *Cenosphaera gregaria* Rüst che si trova dal Devoniano sino alla Creta; *C. regularis* Rüst sino ad ora esclusivamente ritrovata in giacimenti liassici; *C. minuta* Pant. sp. dei diaspri toscani, trovata dal Rüst nella Creta e dal Parona nel Permiano; il ritrovamento di questa forma nel titoniano collega bene questi diversi rinvenimenti. Sono forme che si trovano nei diaspri siciliani, dal Rüst creduti permocarboniferi, e che probabilmente sono giuresi; *Sphaeropyle entostoma* Rüst, *Thecosphaera sicula* Rüst, *Ellipsostylus obliquus* Rüst, *Lithatractus brevispinus* Rüst, *Spongurus plantaeformis* Rüst, *Distympanium carbonicum* Rüst. Delle altre forme note, *Carposphaera va-*

lida Rüst si trova nel titoniano di Oberstdorf; *Staurosphaera antiqua* Rüst è degli strati ad Aptici di Urschlau; *Staurodoras Mojsisovicsi* Dunikow. è del Lias del Schaafberg e si trova nelle coproliti di Ilsede, e finalmente *Porodiscus simplex* Rüst è forma assai comune nelle stesse coproliti, nel titoniano svizzero ecc.

È notevole in questa fauna il fatto della grande ricchezza di alcuni gruppi, come le Sferide e le Cirtide, mentre altri gruppi sono pochissimo o punto rappresentati, come ad esempio i Discoidi, i Larcoidi ecc.

E notevole è pure la presenza di alcuni generi sino ad ora, per quanto io mi sappia, non ancora rappresentati allo stato fossile come: *Spongolonche*, *Exastylarium*, *Pipettella*, *Tripodictya*, *Carpocanistrum* tra gli altri, ai quali aggiungendo i cinque nuovi arrivano ad un numero notevole di generi da aggiungersi al numero già abbastanza ragguardevole di quelli sin'ora conosciuti. Questa cifra però andrà certamente crescendo, come pure quella delle forme, inquantochè i Radiolari sono sempre stati poco curati dai paleontologi, e numerose faune, certo ricchissime, stanno ancora ignorate, immerse nelle varie rocce, e forse sino dal Precambriano, come recentemente ha dimostrato il Cayeux.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero Ferdinando Cohn, avvenuta il 26 giugno 1898; apparteneva il defunto Socio alla Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali sin dal 4 agosto 1892.

CONCORSI A PREMI

Al concorso al premio Santoro, scaduto col 30 giugno 1898, fu presentato il seguente lavoro:

Alberti Giuseppe. *Manuale di geoscopia agraria Veronese.*

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
dal 12 giugno al 3 luglio 1898.

Cocchi I. — La sorgente di Sangemini. Studio geoidrologico. Terni, 1898. 8°.

De Angelis d'Ossat J. — Los primeros antozoos y briozoos miocénicos recogidos en Cataluña. Barcelona, 1898. 8°.

Houzeau J. C. e *Lancaster A.* — Bibliographie générale de l'Astronomie. T. I, 2e partie. Bruxelles, 1889. 8°.

Index Catalogue of the Library of the Surgeon-general's Office, U. S. Army. 2d Series, vol. II. Washington, 1897. 4°.

Marey E. J. — La Chronophotographie appliquée à l'étude des actes musculaires dans la locomotion. Paris, 1898. 4.

Martini T. — Intorno al calore che si sviluppa nel bagnare le polveri. Venezia, 1898. 8°.

Omboni G. — Il gabinetto di geologia della R. Università di Padova. Padova, 1898. 8°.

Rizzardi U. — Aracnidi di Vallombrosa raccolti dal dott. G. Cecconi. Pavia, 1898. 8°.

Sacco F. — Essai sur l'origine de la Terre. Torino, 1897. 8°.

Id. — Il pozzo trivellato di Alessandria. Torino, s. a. 8°.

Id. — I materiali da costruzione delle colline di Torino-Casale-Valenza. Torino, 1898. 8°.

Id. — I molluschi dei terreni terziarî del Piemonte e della Liguria. Parti XIX e XXIII. Torino, 1896-97. 8°.

Id. — La geologia e le linee ferroviarie. Torino, 1898. 8°.

Id. — Novità malacologiche. Parma, 1897. 8°.

Id. — Relazioni geologiche sopra progetti di derivazione d'acqua potabile. Torino, 1896-8. 8°.

Id. — Schema del corso di geologia applicata. Torino, 1898. 8°.

Sars G. O. — An account of the Crustacea of Norway. Vol. II. Isopoda P. IX, X. Bergen, 1898. 8°.

Schiaparelli G. V. — Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci. Milano, 1898. 4°.

Sensi F. — Delle forze che entrano in giuoco nei movimenti di traslazione degli animali domestici. Foligno, 1898. 8°.

Id. — Metodo per determinare il centro di gravità negli animali domestici. Foligno, 1898. 8°.

Id. — Progetto per utilizzare la marea come forza motrice. Assisi, 1898. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 17 luglio 1898

Fisica. — *Di un nuovo metodo sperimentale per lo studio dell' assorbimento della luce nel campo magnetico.* Nota del Corrispondente AUGUSTO RIGHI.

1). Un fascio parallelo di luce bianca (proveniente dal sole o da una lampada ad arco) attraversa secondo l' asse la nota elettrocalamita di Ruhmkorff, munita dei suoi due nicol, disposti colle loro sezioni principali ad angolo retto, cioè all' estinzione (1). Se fra i poli si colloca una fiamma con sodio (becco Bunsen con perla di cloruro di sodio), la luce rimane naturalmente estinta. Che cosa accadrà eccitando con una corrente l' elettrocalamita?

Consideriamo la luce di N vibrazioni, corrispondente ad una delle righe del sodio, cioè una luce che è assorbita dalla fiamma quando non esiste il campo magnetico. Non appena il campo esiste, il vapore di sodio non assorbe più la luce N (2), ma assorbisce in sua vece una vibrazione circolare destrogira di N_1 vibrazioni ed una levogira di N_2 vibrazioni, essendo uno dei due numeri N_1 ed N_2 maggiore, e l' altro minore di N. Ciò costituisce il fenomeno di Zeeman, studiato per via di assorbimento. Ammettiamo, per fissare le idee, che N_1 sia il numero di vibrazioni della destrogira.

(1) È noto che il campo di visione attraverso due nicol incrociati non è mai interamente oscuro, allorchè si adopera una luce assai intensa; invece della completa oscurità si vede semplicemente una frangia nera sfumata ai due lati. Quando in ciò che segue si parlerà di oscurità, si dovrà sempre riferirsi a quella frangia nera.

(2) Per brevità di esposizione chiamerò spesso *luce N* la luce di N vibrazioni al secondo.

Siccome la vibrazione rettilinea N_1 si può scomporre in due circolari inverse, così mentre la componente destrogira è assorbita, rimane intatta la componente levogira. L'analizzatore non potrà estinguerla, e lascierà uscire la componente rettilinea di questa vibrazione circolare levogira, diretta secondo la sua sezione principale. Del pari uscirà dall'apparecchio una vibrazione N_2 parallela alla precedente.

Dunque, quando si crea il campo magnetico, deve apparire una luce costituita da radiazioni di N_1 ed N_2 vibrazioni, identica cioè alla luce che assorbe il corpo posto nel campo.

Siccome N_1 ed N_2 diversificano pochissimo da N, così, nel caso del sodio, la luce che appare è gialla. È quasi superfluo l'aggiungere che il ragionamento fatto sulla luce di N vibrazioni si può ripetere per ogni altra luce assorbita.

2). Questa mia previsione è stata confermata immediatamente colla esperienza all'uopo istituita. Questa esperienza porge dunque un modo semplice di mettere in evidenza l'esistenza del fenomeno di Zeeman.

Il nuovo metodo ha un pregio particolare, ed è che vale a mostrare l'esistenza dell'effetto Zeeman anche impiegando campi magnetici relativamente deboli.

È chiaro infatti, che l'intensità della luce che appare, allorchè si crea il campo magnetico, è proporzionale alla intensità della luce bianca adoperata. Ora, colla luce solare o con quella dell'arco voltaico l'esperienza riesce in modo evidentissimo anche *quando il campo magnetico, prodotto dalla corrente di una sola coppia a bicromato, ha l'intensità di circa 300 unità soltanto* [1].

Mettendo nella fiamma un sale di litio o di tallio, anzichè un sale di sodio, l'esperienza riesce del pari. La luce che appare per l'azione del campo magnetico è rossa nel primo caso e verde nel secondo.

È importante il notare come non sia possibile confondere la nuova esperienza con quelle relative alla rotazione magnetica del piano di polarizzazione. Infatti, girando in un senso qualunque l'analizzatore, la luce gialla non si estingue; al contrario diviene bianca, e cresce rapidamente d'intensità, proseguendo la rotazione.

3). Un altro pregio caratteristico del metodo descritto è il seguente:

Per osservare l'effetto Zeeman nel modo ordinario occorre, che il corpo posto fra i poli dia, sia poi per emissione o per assorbimento, uno spettro a righe sottili e ben definite, giachè soltanto in tal caso si può constatare

[1] Adoperando un campo molto intenso la luce gialla che appare è vivissima e può essere proiettata sopra un diaframma. (*Aggiunta.* Il prof. Warburg, al quale avevo fatto conoscere la mia esperienza, mi scrive ora da Berlino, di averla ripetuta in tal modo nel suo corso mediante una corrente di 40 Ampère).

lo sdoppiamento di ogni riga, che ha luogo quando, come nell'esperienza di cui qui si tratta, la luce cammina parallelamente alle linee di forza. Invece, nel caso della mia esperienza quella condizione può non essere soddisfatta.

Infatti, il ragionamento fatto più sopra relativamente ad una luce di N vibrazioni, può ripetersi per ogni altra luce assorbita, anche se queste luci hanno lunghezze d'onda che si segnono con continuità. Per ogni luce di N vibrazioni assorbita quando il corpo non è nel campo magnetico, escono dall'analizzatore due luci di N_1 ed N_2 vibrazioni, allorchè il campo esiste; e siccome N_1 ed N_2 diversificano pochissimo da N, così si può dire che la luce che appare creando il campo è identica alla luce assorbita, comunque questa sia distribuita nello spettro.

4). Col metodo descritto ho constatato che anche *coll'ipoazotide si ottiene il fenomeno di Zeeman.* Ecco come ho improvvisato l'esperienza, che in seguito potrà poi perfezionarsi.

A un tubo di vetro AB (fig. 1) lungo 32 mm. e di 15 mm. di diametro, sono saldati i cannelli C e D, il secondo dei quali sbocca in una provetta E

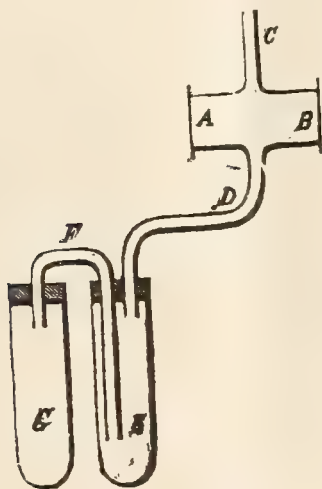



Fig. 1.

contenente anidride fosforica. Un cannello F fa comunicare questa provetta con un'altra G, in fondo alla quale trovasi un poco di nitrato di piombo. Scaldando questo sale si svolge l'ipoazotide, che, disseccandosi in E riempie ben tosto il tubo AB. Questo è chiuso alle basi con due dischi di vetro sottilissimi (copri-oggetti da microscopio) fissati con gutta-percha, i quali non danno luogo a sensibile rotazione magnetica delle vibrazioni. Naturalmente il tubo AB è posto fra i poli, in modo che la luce lo attraversi secondo l'asse.

Nella mia esperienza la corrente magnetizzante era di 11 Ampère ed il campo magnetico di circa 2000 unità. Quando si chiude il circuito *appare*

una luce verde-azzurra, cioè di tinta complementare della luce giallo-rossa, che presenta l'ipoazotide per trasparenza.

5). Se si riceve la luce che esce dall'apparecchio in uno spettroscopio a visione diretta, si può osservare lo spettro di quella luce verde-azzurra, e così si constata che questo spettro è complementare di quello che si ha dall'ipoazotide per assorbimento. Infatti, per quanto è stato detto più sopra, la luce verde-azzurra è costituita da raggi identici a quelli che vengono assorbiti; e siccome N_1 ed N_2 differiscono pochissimo da N, lo spettro osservato è complementare di quello ordinario di assorbimento dell'ipoazotide, cioè le regioni chiare od oscure dell'uno occupano il posto delle regioni rispettivamente oscure o chiare dell'altro.

Il confronto fra i due spettri si fa facilmente operando come segue. Una volta che, col chiudersi della corrente magnetizzante, è apparso nel campo dello spettroscopio il nuovo spettro, si gira poco a poco in un senso qualunque l'analizzatore. Così facendo si lascia pervenire allo spettroscopio la luce giallo-rossa che ha attraversato l'ipoazotide, e che prima era estinta dall'analizzatore. Si vede allora lo spettro diventare dapprima continuo, e senza oscuramenti, poi si veggono sorgere le striscie d'assorbimento nelle regioni che prima erano luminose.

Si può dire che questa esperienza produce il curioso risultato di mostrare *lo spettro di emissione di un gas non luminoso* ammessa anche per l'ipoazotide la legge dell'identità fra emissione ed assorbimento. Del resto questo risultato singolare si raggiunge anche coll'esperienza seguente.

6). Si può ottenere *lo spettro di emissione del vapore di sodio non luminoso*, eseguendo l'esperienza che sto per descrivere.

Il nicol polarizzatore *P* (fig. 2) e l'analizzatore *A*, pur restando sull'asse dell'apparecchio, sono fissati un po' lontani, onde far posto ad una lunga

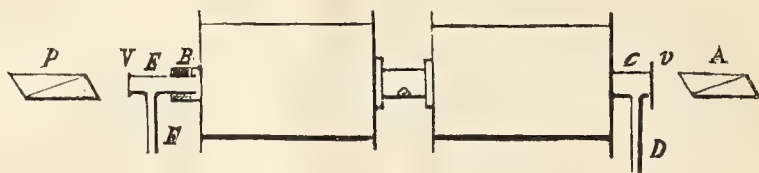



Fig. 2.

canna di vetro *B C*, introdotta nel vano praticato lungo l'asse dell'apparecchio. Presso l'estremità *C* della canna, che è chiusa con un vetro piano *V*, è saldato un tubo laterale affilato *D* liberamente aperto nell'atmosfera, mentre per l'altra apertura *B* della canna stessa penetra un tappo attraversato dal breve tubo *E*. Anche questo è chiuso in *V* da un vetro piano, e porta un ramo laterale *F* comunicante con un apparato nel quale si svolge idrogeno. Inoltre, nella porzione di tubo, che resta visibile fra i due rocchetti dell'elettro-

calamita, e che è avvolta con tela d'ottone, fu introdotto un pezzetto di sodio metallico.

Dopo aver riempito la canna con idrogeno secco, si scalda il sodio, riducendolo in vapore. Se allora si eccita l'elettrocalamita, mentre si guarda attraverso l'analizzatore, si vede apparire la solita luce gialla; e se fra questo e l'occhio s'interpone lo spettroscopio, si vede la riga gialla del sodio.

Nell'esperienza eseguita con questa disposizione la parte libera della canna, che restava visibile fra i poli, era lunga 45 mm. e la corrente magnetizzante era di 9 Ampère. La riga gialla era assai larga, e in mezzo ad essa si vedeva una sottile riga nera, dovuta probabilmente al vapore di sodio che, in seguito alla corrente d'idrogeno che un momento prima era cessata, era stato trascinato entro il rocchetto verso *A*.

Se si gira gradatamente l'analizzatore, appare dapprima uno spettro continuo, poi si forma una larga riga nera di assorbimento, nel posto prima occupato dalla riga gialla. Questo risultato è analogo a quello osservato nell'esperienza fatta coll'ipoazotide.

7). La seguente esperienza conferma le spiegazioni date.

Si dispongano le cose come nella prima esperienza, ma avvertendo che la fiamma a sodio posta fra i poli sia poco calda e povera di sodio. Serve bene la disposizione indicata dal sig. Cotton (1) o quella ideata dal sig. Koenig (2), l'ultima delle quali consiste nel porre una rete metallica orizzontale attraverso alla fiamma di un becco Bunsen, e la perla di cloruro di sodio al di sotto. Se si adopera la luce solare, l'esperienza non riesce bene, mentre si ottiene il solito effetto sostituendo la luce della lampada ad arco a quella del sole. Ma in questo caso il fenomeno cessa di prodursi, se fra la lampada e l'apparecchio si pone un'altra fiamma di sodio assai ricca in vapori di questo metallo. Mi sembra che nei casi in cui l'esperienza non riesce bene, ciò si debba alla circostanza che nella luce che attraversa l'apparecchio manca quella, che la fiamma posta fra i poli è capace di assorbire.

8). Se il raggio luminoso di luce bianca, invece di essere parallelo alle linee di forza, è a queste perpendicolare, i fenomeni descritti più non si producono. Però se ne osserva una traccia se il campo magnetico non è uniforme, o la fiamma non è ben collocata. In questi casi vi sono regioni ove la supposta ortogonalità non si verifica.

Ma, per questo caso della luce perpendicolare alle linee di forza, si può prevedere la produzione di fenomeni simili a quelli descritti più sopra, a patto che la luce bianca non sia polarizzata in linea retta, ma sia per esempio polarizzata circolarmente. Anche l'analizzatore, che deve estinguere la luce quando il campo magnetico non esiste, dovrà essere un analizzatore circolare.

(1) C. R. 29 nov. 1897, p. 865.
(2) Wied., Ann., C. 63, p. 268.

Ed invero, il gas posto fra i poli (p. es. vapore di sodio) assorbisce quelle radiazioni che è capace di emettere. Ora, se esso emette, quando non esiste il campo magnetico, una radiazione di N vibrazioni, emette invece, allorchè si eccita l'elettrocalamita ed in virtù del fenomeno di Zeeman, tre radiazioni, di N, N_1 ed N_2 vibrazioni al secondo, essendo N compreso fra N_1 ed N_2, ed essendo la vibrazione N parallela alle linee di forza, e le vibrazioni N_1 ed N_2 perpendicolari a queste linee [1].

Dunque il medesimo corpo assorbirà, quando è nel campo magnetico ed è attraversato da un fascio di luce bianca perpendicolare alle linee di forza, una radiazione di N vibrazioni parallela, e due di N_1 ed N_2 vibrazioni perpendicolari, alle dette linee.

Nell'ipotesi in cui la luce bianca sia polarizzata circolarmente, di ciascuna delle tre luci N, N_1, N_2, rimarrà non assorbita una delle componenti rettilinee, e precisamente una vibrazione N perpendicolare alle linee di forza, e due vibrazioni N_1, N_2, parallele a queste linee. L'analizzatore circolare non può estinguere queste tre vibrazioni rettilinee, e perciò deve apparire luce gialla (nel caso del sodio) quando si crea il campo magnetico. Anche qui la luce, che appare, è identica a quella che il corpo assorbisce, e dà uno spettro, che è sensibilmente quello di emissione del corpo stesso.

Non sono riescito ancora ad avere sperimentalmente una sicura conferma di questa previsione, la quale, come si vede, è subordinata alla validità di certe ipotesi. In vero la realizzazione di questa esperienza non è così facile, come quella dell'esperienza relativa al caso della luce parallela alle linee di forza. S'incontrano in pratica grandi difficoltà nell'ottenere, per mezzo d'un analizzatore circolare, l'estinzione di un raggio polarizzato circolarmente, anzi non vi si riesce in modo abbastanza completo, e ciò per varî motivi che non starò a spiegare, tanto se si fa uso di lamine quarto di onda, quanto se s'impiegano i parallelepipedi a riflessione totale.

Matematica. — *Le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte* [2]. Nota 2ª del dott. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

In questa Nota, dopo di aver esteso alle forme con coefficienti qualunque la identità, analoga a quella di Lagrange, trovata per quelle forme lineari alle differenze in cui sono eguali fra di loro i coefficienti del primo e dell'ultimo termine, dimostrerò che non è possibile porre una tale identità a

[1] Secondo il sig. Cornu (Eclairage électrique, 29 janvier 1898) anche la vibrazione parallela alle linee di forza si sdoppia. Per semplicità ho trascurato questo sdoppiamento; ma è evidente che anche tenendone conto non muterebbe il risultato finale al quale conduce il ragionamento esposto in questo paragrafo.

[2] V. questi Rendiconti, 1° sem. 1898, pag. 257.

fondamento di una decomposizione, in fattori del primo ordine, caratteristica per le forme equivalenti alla loro aggiunta.

Prenderò occasione da questo fatto per porre in rilievo alcune delle difficoltà che, spesso ed inaspettatamente, si incontrano quando si tenta di ritrovare, nel calcolo alle differenze, risultati paralleli a quelli che, con metodi più ovvî, si ottengono nel calcolo infinitesimale.

Dimostrerò poi che qualunque funzione integrale di una forma alle differenze equivalente alla sua aggiunta, è anche integrale di una forma a coefficienti costanti e parimenti equivalente alla sua aggiunta. Per queste ultime forme, giovandomi del fatto che la loro equazione caratteristica è reciproca, troverò una formula di decomposizione analoga a quelle che hanno dato Jacobi e Darboux per le forme differenziali.

Spero che, per l'importanza dell'argomento, non sarà senza qualche interesse questo mio lieve contributo, e mi è di incoraggiamento il vedere alcuni dei risultamenti a cui sono pervenuto nelle Note precedenti, usati dal prof. Pincherle nelle sue recenti Note: *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze*; e: *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio* (1).

1. L'identità, analoga a quella data dal Lagrange per le forme differenziali, fu estesa a quelle forme alle differenze in cui sono eguali all'unità i coefficienti del primo e dell'ultimo termine (2). Per vedere ora se quella restrizione sia o no necessaria, basta osservare che: essendo

$$A(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \cdots + a_n \theta^n y ,$$

indicando con $\bar{A}(y)$ la sua aggiunta, con $y_1, y_2 \dots y_n, z_1, z_2, \dots, z_n$, due sistemi aggiunti, con s_{rs}, la somma $\sum_{h=1}^{n} \theta^r y_h \theta^s z_h$ e ricordando che:

$$\bar{A}(y) = \frac{a_0}{\theta F(y_1, y_2, \dots, y_n)} \begin{vmatrix} y & , y_1 & , \dots , y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^n y , & \theta^n y_1 , & \dots , \theta^n y_n \end{vmatrix}$$

e che $F(y_1, y_2, \dots, y_n) F_{-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, si ha:

$$(1) \qquad \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0} \bar{A}(y) = \begin{vmatrix} y & , s_{0,1} , s_{0,0} , \dots , s_{0,-(n-2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \theta^n y & , s_{n,1} , s_{n,0} , \dots , s_{n,-(n-2)} \end{vmatrix} .$$

Ciò posto, e per le formule (12) e (21) trovate nella Nota: *Sui determinanti di funzioni* . . . (3).

(1) Questi Rendiconti, seduta del 17 aprile 1898.

(2) Cfr. il n. 7 della Nota: *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze* (questi Rendiconti, seduta del 3 maggio 1896).

(3) Questi Rendiconti, seduta del 12 aprile 1896.

dallo sviluppo di quello stesso determinante nullo ivi considerato si ricava:

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0}\theta z\,\mathrm{A}(y)+s_{0,1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\psi(\theta y\,,\theta z)+(-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\psi(y\,,\theta z)=0$$

ed anche:

$$\frac{(-1)^n}{a_0}z\mathrm{A}(y)+s_{0,1}\psi(\theta y\,,z)+(-1)^n\psi(y\,,z)=0\,.$$

In modo interamente analogo si giunge alla identità:

$$\frac{(-1)^n}{a_0}y\overline{\mathrm{A}}(z)+s_{-1,0}\,\psi(y\,,\theta^{-1}z)+(-1)^n\psi(y\,,z)=0$$

e, sottraendo:

$$z\mathrm{A}(y)-y\overline{\mathrm{A}}(z)=(-1)^n a_0\{s_{0,1}\,\psi(\theta y\,,z)-s_{-1,0}\,\psi(y\,,\theta^{-1}z)\}\,. \tag{2}$$

Ricordando ora che y_r è integrale della $\mathrm{A}(y)$, si ha:

$$s_{0,1}=\sum_{r=0}^{n-1}y_r\theta z_r=-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{a_0}\theta^s y_r\,\theta z_r=-\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{a_0}\sum_{r=0}^{n-1}\theta^s y_r\,\theta z_r=-\frac{a_n}{a_0}$$

$$s_{-1,0}=\theta^{-1}s_{0,1}=-\theta^{-1}\frac{a_n}{a_0}\,.$$

Basta dunque che il rapporto $\frac{a_n}{a_0}$ *sia costante per la operazione* θ *perchè dalla identità* (2) *si abbia*:

$$z\mathrm{A}(y)-y\overline{\mathrm{A}}(z)=(-1)^{n+1}a_n\Delta\psi(y\,,\theta^{-1}z)\,. \tag{3}$$

In particolare adunque, quest'ultima identità si potrà sempre ritener valida se la forma è equivalente alla sua aggiunta ([1]).

Potendo poi supporre $a_n=1$, avremo semplicemente:

$$z\mathrm{A}(y)-y\overline{\mathrm{A}}(z)=(-1)^{n+1}\Delta\psi(y\,,\theta^{-1}z)\,. \tag{4}$$

Ponendo $\theta^n z$ al posto di z, avremo l'identità:

$$\theta^n z\mathrm{A}(y)-y\overline{\mathrm{A}}(\theta^n z)=(-1)^{n+1}\Delta\psi(y\,,\theta^{n-1}z) \tag{5}$$

nella quale non compariscono potenze negative del simbolo operatorio θ applicate a funzioni arbitrarie della x.

2. Per le forme equivalenti alle loro aggiunte, fattovi $a_n=1$, e ricordando che in questo caso: $\overline{\mathrm{A}}(\theta^n z)=\theta^n\overline{\mathrm{A}}(z)=(-1)^n\mathrm{A}(z)$,

$$\theta^n z\,\mathrm{A}(y)+(-1)^{n+1}y\,\mathrm{A}(z)=(-1)^{n+1}\Delta\psi(y\,,\theta^{n-1}z) \tag{6}$$

([1]) Cfr formole (36) e (37) della Nota precedente.

e, ponendovi y al posto di z,

$$A(y)(\theta^n y + (-1)^{n+1} y) = (-1)^{n+1} \Delta\psi(y, \theta^{n-1} y). \tag{7}$$

Di qui l'identità:

$$\sum_{r=0}^{m-1} A y(x_0+r) \{y(x_0+n+r) + (-1)^{n+1} y(x_0+r)\} = \tag{8}$$

$$= (-1)^{n+1} \psi(y(x_0+m), \theta^{n-1} y(x_0+m))$$

che può utilmente servire nello studio di serie più generali delle ricorrenti.

3. Se nella (6) si pone al posto della y un integrale, ω_1, della forma A, si trova:

$$A(z) = \frac{1}{\omega_1} \Delta\psi(\omega_1 \theta^{n-1} z), \tag{9}$$

ho verificato però che inutilmente si cercherebbe di ricavare, da questa identità e dalla $\Delta\psi(\omega_1, \theta^{n-1}\omega_1) = 0$ la decomposizione in fattori cui ho accennato da principio. Volendo vedere fino a qual punto si può, per questa strada, spingere l'analogia con le ordinarie forme differenziali, prenderemo come sistemi aggiunti i coefficienti della relazione:

$$\varphi(x) = A_0(z, x)\varphi(z) + \cdots + A_{m-1}(z, x)\varphi(z+u-1)$$

ed i reciproci della ultima linea nel determinante $V(A_0, A_1, \ldots, A_{m-1})$. Al § 3 del mio *Contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze* [3] ho indicato questi reciproci coi simboli

$$B_{n-1}(z, x), B_{n-1}(z, x-1) \ldots B_{n-1}(z, x+n-1)$$

ed ho dato lo sviluppo, sia delle A che delle B, sotto forma di determinanti.

L'esame diretto di questi determinanti ci mostra immediatamente che *per le forme a coefficienti costanti che sono equivalenti alle loro aggiunte, si ha*:

$$B_{n-1}(z, x) = \theta^{n-1} A_0, B_{n-1}(z, x-1) = \theta^{n-2} A_0, \ldots, B_{n-1}(z, x-n+1) = A_0.$$

Dalle note proprietà della ψ si ricava allora:

$$\psi(A_0, \theta^{n-1-r} A_0) = 0 \quad (r = 1, 2 \ldots n-1)$$

e cioè $\theta^{-r} A_0$ è integrale della forma di ordine $n-1$ in z, $\psi(A_0, \theta^{n-1} z)$, ed

[3] Annali di matematica, anno 1896.

in conseguenza ho $\psi(A_0\theta^{n-1}z) = \psi_1 \Delta \frac{z}{\theta^{-r}A_0}$. Posto $A_0 = \omega_1$ ho, dalla (9):

$$A(z) = \frac{1}{\omega_1} \Delta \psi_1 \Delta \frac{1}{\theta^{-r}\omega_1} z \,. \tag{10}$$

Anche però nel caso di forme a coefficienti costanti, ora considerato, non potremo seguitare la decomposizione ripetendo per la ψ_1 i ragionamenti fatti per A perchè ψ_1 non è, in generale, nè a coefficienti costanti, nè equivalente alla sua aggiunta.

4. Giova osservare, a questo proposito, che *la condizione di essere decomponibili nello stesso numero di fattori equivalenti ciascuno a ciascuno e disposti nello stesso modo, non è in generale sufficiente per la equivalenza di due forme, se le potenze della θ non hanno tutte esponenti del medesimo segno.*

Valgano al caso le due forme $B = \Delta\alpha_1 \, \Delta\alpha_2 y$, $C = \Delta^{-1}\alpha_1 \, \Delta^{-1}\alpha_2 y$ che non sono, in generale, equivalenti, benchè lo sieno le forme: $\Delta\alpha_1 y$, $\Delta\alpha_2 y$ rispettivamente alle forme $\Delta^{-1}\alpha_1 y$, $\Delta^{-1}\alpha_2 y$.

Volendo allora, dal confronto dei fattori di due forme, ricavare una condizione sufficiente per la loro equivalenza, occorrerà prima trasformare le date in altre equivalenti in cui non compariscono potenze negative della θ. Ciò si ottiene agevolmente considerando che se è $C = A \,.\, B$, e sono p e q i massimi esponenti negativi della θ, nelle A e B rispettivamente, con $p + q = n$; si ha per $\theta^n C$ la decomposizione $\theta^n C = \theta^p(\theta^q A \theta^{-q}) \,.\, \theta^q B$, ed in generale se $C = A_1 \,.\, A_2 \dots A_r$ e sono $p_1, p_2 \dots p_r$ i massimi esponenti negativi della θ nelle $A_1, A_2 \dots A_r$, si ha:

$$\theta^n C = \theta^{p_1}(\theta^{n-p_1} A_1 \theta^{-(n-p_1)}) \, \theta^{p_2} \, (\theta^{n-p_1-p_2} A_2 \theta^{-(n-p_1-p_2)}) \dots \theta^{p_2} A_r \,.$$

In particolare se si avesse:

$$C = E_1 \,.\, E_2 \dots E_r \dots E_n \,, \text{ con } E_r = a_r \theta^{-1} y + b_1 y \,, \tag{11}$$

avrei la forma equivalente:

$$\theta^n C = F_1 \,.\, F_2 \dots F_r \dots F_n \tag{12}$$

con

$$F_r = \theta(\theta^{n-r} E_r \theta^{-(n-r)}) = \theta(\theta^{n-r} a_r \,.\, \theta^{-1} y + \theta^{n-r} b_r y) = \theta^{n-r+1} a_r \,.\, y + \theta^{n-r+1} b_r \,.\, \theta y;$$

decomposta in n fattori del primo grado in θ.

5. Al n. 9 della Nota: *La forma aggiunta* . . ., ho dato, per una forma lineare alle differenze, la decomposizione:

$$A = \frac{1}{\alpha_1} \Delta \frac{1}{\alpha_2} \Delta \frac{1}{\alpha_3} \dots \Delta \frac{1}{\alpha_n} \,.\, \Delta \frac{1}{\alpha_{n+1}} y \tag{14}$$

avremo allora:

$$\bar{A} = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_n} \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_{n-1}} \dots \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_2} \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_1} y .$$

Da cui:

$$(15) \qquad \theta^n \bar{A} = \frac{1}{\theta^n \alpha_{n+1}} \Delta \frac{1}{\theta^{n-1} \alpha_n} \Delta \frac{1}{\theta^{n-2} \alpha_{n-1}} \dots \Delta \frac{1}{\theta \alpha_2} \Delta \frac{1}{\alpha_1} y .$$

Una condizione, *semplicemente sufficiente*, per la equivalenza di una forma con la sua aggiunta sarebbe data allora da una decomposizione (14) con le relazioni:

$$(16) \qquad \alpha_r = \theta^{n-r+1} \alpha_{n-r+2} \quad r = 1 , 2 \dots n + 1 .$$

Poichè, al loco citato, è data la espressione della α_r per due sistemi aggiunti di integrali, si ricaverebbero di qui facilmente delle relazioni fra questi integrali su cui non mi pare opportuno d' insistere, perchè non sarebbero necessarie per la equivalenza di una forma con la sua aggiunta, come si è visto al numero precedente.

6. Poichè le forme equivalenti alle loro aggiunte sono periodiche con periodo n, i loro integrali saranno anche integrali della forma a coefficienti costanti:

$$(17) \qquad C(y) = c_0 y(x) + c_n \theta^n y(x) + c_{2n} \theta^{2n} y(x) + \dots + c_{n^2} \theta^{n^2} y(x) .$$

Il quesito di determinare i coefficienti c_{rn} è pienamente risolto al § V del citato *Contributo*, e potrebbe ridursi alla ricerca di una forma lineare alle differenze $B = \sum_0^{n(n-1)} b_r \theta^r$ tale che nel prodotto $C = B' . A$ sieno nulli i coefficienti di potenze di θ con esponenti non congrui a zero (mod. n).

La forma C così determinata, si può facilmente ridurre in una dell' ordine n mediante la trasformazione:

$$(18) \qquad n \, \Delta x = \Delta z .$$

Per effetto di una tale trasformazione la varietà V, composta di tutti i valori che si possono immaginare attribuiti alla x, vien fatta corrispondere all' una od all' altra delle n varietà: $V_1 , V_2 \dots V_n$, composte con elementi di V tutti congrui fra loro (mod. n), a seconda della determinazione della costante arbitraria che risulta dalla integrazione della (18).

Le funzioni di x, che ammettono il periodo n, sono trasformate in funzioni di z costanti in ciascuna delle varietà V_r, e quelle che ammettono il periodo 1, sono trasformate in funzioni di z costanti in tutta la varietà $V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

Poichè ora i coefficienti $c_0, c_n \dots c_{n^2}$ sono costanti in V, per la forma trasformata di $C(y)$, che potremo indicare con:

$$(19) \qquad C(f) = c_0 f(z) + c_n \theta f(z) + \cdots + c_{n^2} \theta^n f(z),$$

si avranno integrali la cui espressione algebrica rimane immutata qualunque sia la varietà V_r che vien fatta corrispondere a V. Si noti però che, se $y_1, y_2, \dots y_n$ è un sistema fondamentale della (19), ed è μ una radice primitiva n^{esima} dell'unità, nel quadro:

$$\begin{matrix} y_1, & y_2, \dots, & y_n \\ \mu^x y_1, & \mu^x y_2, \dots, & \mu^x y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu^{(n-1)x} y_1, & \mu^{(n-1)x} y_2, \dots, & \mu^{(n-1)x} y_n, \end{matrix}$$

una qualunque delle linee ci dà ancora un sistema fondamentale della (19), e tutte le n^2 funzioni ivi contenute formano un sistema fondamentale della (18).

7. Dal modo stesso con cui la C fu definita risulta che se una funzione è integrale della A, quando il campo V di variabilità si riduce ad una qualunque delle V_r, è anche integrale della (19). *Voglio ora dimostrare che le forme* $A(y)$, $C(f)$ *hanno sempre, nel senso ora indicato, almeno un sistema fondamentale di integrali a comune.*

Ed infatti, perchè un sistema $\varphi_0, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$ fondamentale per la A, non lo sia per C, occorre che fra i suoi elementi passi una relazione della forma:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} c_{r,s} \mu^{rx} . \varphi_s = 0 \qquad \text{con } c_{r,s} \text{ costanti in V}$$

cioè:

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mu^{rx} \sum_{s=0}^{n-1} c_{r,s} \varphi_s = 0 .$$

Poichè $\sum_{s=0}^{r-1} c_{r,s} \varphi_s$ è ancora un integrale di A; tutto si riduce a provare che *non per qualunque sistema fondamentale di* A *è possibile una relazione identica della forma* $\sum_{r=0}^{n-1} \mu^{rx} \varphi_r = 0$. Se questo fosse, presi due sistemi fondamentali $y_0, y_1 \dots y_{n-1}, y_0, y'_1 \dots y'_{n-1}$, con un elemento comune, ed i rimanenti diversi, potrei sempre fare in modo che, in quelle identità che suppongo aver luogo sia per l'uno che per l'altro dei due sistemi, fossero eguali i coefficienti di y_0, ed allora, dalle due:

$$y_0 + \mu^x y_1 + \cdots + \mu^{(n-1)x} y_{n-1} = 0, \quad y_0 + \mu^x y'_1 + \cdots + \mu^{(n-1)x} y'_{n-1} = 0,$$

si ha, sottraendo:

$$y_1 - y'_1 + \mu^x (y_2 - y'_2) + \cdots + \mu^{(n-2)x} (y_{n-1} - y'_{n-1}) = 0,$$

e qui giova notare che le differenze $y_r \dots y'_r$ sono esprimibili in funzione lineare omogenea, con coefficienti costanti in V e non tutti identicamante nulli, degli elementi:

$$y_0 \, , y_1 \cdots y_{n-1} \, .$$

Per un altro sistema $y_0 \, , y'_1 \, , y''_2 \dots y''_n$, distinto dai due precedentemente considerati, avrei analogamente:

$$y_1 - y'_1 + \mu^x(y_2 - y''_2) + \cdots + \mu^{(n-2)x}(y_{n-1} - y''_{n-1}) = 0.$$

E, sottraendo:

$$y'_2 - y''_2 + \mu^x(y'_3 - y''_3) + \cdots + \mu^{(n-3)x}(y'_{n-1} - y''_{n-1}) = 0,$$

dove, per le differenze $y'_r - y''_r$ si possono ripetere le medesime osservazioni fatte per le $y_r - y'_r$.

Così continuando troverei in fine l' identità $y_{n-1}^{(n-2)} - y_{n-1}^{(n-1} = 0$ che non è possibile perchè quella differenza può esprimersi in funzione lineare omogenea, a coefficienti costanti in V e non tutti identicamente nulli, degli integrali di un sistema fondamentale di A.

8. Le due forme A e C, che ammettono un sistema fondamentale comune, dovranno riguardarsi come equivalenti. Siccome però la proprietà di essere equivalente alla sua aggiunta è comune a tutte le forme equivalenti ad una data che ammette tale proprietà, potremo senz' altro concludere che la C è equivalente alla sua aggiunta e cioè che: *Qualunque funzione integrale di una forma lineare alle differenze equivalente alla sua aggiunta, è anche integrale di una forma equivalente alla sua aggiunta ed a coefficienti costanti.*

9. Per avere una ulteriore conferma dei risultamenti cui sono pervenuto, ho considerato che, se la forma C deve essere equivalente alla sua aggiunta, poichè i suoi coefficienti sono costanti, dovranno verificare le relazioni

$$c_{rn} = (-1)^n_{n(r-n)} \, .$$

Ora queste relazioni si verificano col calcolo diretto mediante un procedimento analogo a quello indicato al § III del citato *Contributo*. È facile vedere che $c_0 \, , c_n \dots c_{n^2}$ sono i determinanti di ordine $n(n-1)+1$ che si ottengono dalla matrice:

$$\mathrm{M} = \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & \theta a_0 & \theta a_1 & \dots \theta a_{n-2} & \theta a_{n-1} & \theta a_n & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & \theta^2 a_0 & \dots \theta^2 a_{n-3} & \theta^2 a_{n-1} & \theta^2 a_{n-1} & \theta^2 a_n & 0 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

togliendo ordinatamente n colonne fra le $n+1$ che occupano i posti 1°, $(n+1)^{\text{esimo}}$, $(2n+1)^{\text{esimo}}$, $(n^2+1)^{\text{esimo}}$.

Tenendo conto della periodicità e delle altre relazioni che hanno luogo fra i coefficienti di una forma equivalente alla sua aggiunta, si scorge facilmente che i determinanti che si ottengono in modo simmetrico rispetto alle colonne estreme (cioè gli sviluppi dei coefficienti c_{rn}, $c_{(n-r)n}$), sono eguali a meno di un fattore $(-1)^n$.

Ho di più osservato che, tolto un fattor comune che risulta ai coefficienti così formati, rimane $c_0 = (-1)^n c_n = a_0 \, \theta a_0 \ldots \theta^{n-1} a_0$, e gli altri coefficienti sono formati linearmente con gli n^2 elementi $a_0 \, a_1 \ldots a_n$, $\theta a_0 \, \theta a_1 \ldots \theta a_n$, ... $\theta^{n-1} a_0 \, \theta^{n-1} a_1 \ldots \theta^{n-1} a_n$ [1].

10. Da quello che abbiamo detto risulta che *la equazione caratteristica della* C:

$$c_0 + c_n z + \cdots + c_{n^2} z^n = 0 , \tag{20}$$

è reciproca. Se indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \ldots$ le sue radici, avremo, per la C, la decomposizione:

$$C = E_1 \, . \, E_2 \ldots E_m \, . \, F \, . \, E'_m \, . \, E'_{m-1} \ldots E_1'$$

$$\text{con } E_r = \theta - \frac{1}{\alpha_r}, \quad E'_r = \theta - \frac{1}{\alpha_r}, \quad F = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2m \\ \theta - 1 & \text{se } n = 2m+1 \end{cases} .$$

Se poniamo $Q = E_1 \, . \, E_2 \ldots E_m$, $Q' = E'_m \, E'_{m-1} \ldots E'_1$, si ha, per le formole (12), (13):

$$\theta^n \overline{Q} = \theta(\theta^{m-1} \, \overline{E}_m \theta^{-(m-1)}) \, \theta(\theta^{m-2} \, \overline{E}_{m-1} \theta^{-(m-2)}) \ldots \theta \overline{E}_1 .$$

Ma

$$\theta(\theta^{r-1} \overline{E}_r \, \theta^{-(r-1)}) = 1 - \alpha_r \theta = - \alpha_r \left(\theta - \frac{1}{\alpha_r}\right) = - \alpha_r \, E_r' \quad ,$$

dunque

$$\theta^n \overline{Q} = (-1)^m \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m Q' , \text{ e } Q' = \frac{(-1)^m}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} \theta^m \overline{Q}$$

ed allora, per la forma C equivalente alla sua aggiunta, ed a coefficienti costanti, si ha la decomposizione

$$C = \frac{(-1)^m}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} Q \, . \, F \, . \, \theta^m \overline{Q} \tag{22}$$

[1] Per il caso di $n = 3$ si veda la mia Nota: *Sui sistemi ricorrenti del 3° ordine* Rendiconti Circolo mat. di Palermo, t. V.

in cui è manifesta l'analogia con quelle che, per le forme differenziali, furono date dal Jacobi e dal Darboux.

11. È facile ora vedere che, reciprocamente, *se una forma alle differenze ammette la decomposizione*

$$(23)\quad C = c\,.\,Q\,.\,F\,.\,\theta^m\overline{Q}\,,\quad F = \begin{cases} 1 \text{ per } n = 2m \\ \theta - 1 \text{ per } n = 2m + 1 \end{cases},\quad c \text{ costante},$$

e se inoltre i coefficienti della Q *ammettono il periodo* $n - m$, *la forma* C *è equivalente alla sua aggiunta.*

Ed infatti si ha $\overline{C} = Q\,.\,\theta^{-m}\overline{F}\,.\,\overline{Q}$. Se $n = 2m$ ho

$$\theta^m\overline{C} = c_1(\theta^m Q \theta^{-m})\,\theta^m\overline{Q} = c_1 Q\,.\,\theta^m\overline{Q}\,.$$

E se $n = 2m + 1$, ho

$$\theta^{m+1}C = c(\theta^{-m+1}\overline{Q}\theta^{-(m+1)})\,\theta(\theta^m\overline{F}\theta^{-m})\,\theta^m\overline{Q} = c\,.\,Q\,.\,F\,.\,\theta^m\overline{Q}$$

in ogni modo ho sempre $\theta^{n-m}\overline{C} = cC$, con c costante per la operazione θ, che dimostra appunto l'asserto.

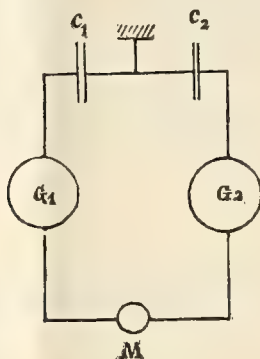
12. Non mi pare inutile finalmente far notare che le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte, ed i primi membri delle equazioni algebriche reciproche hanno egual formola di decomposizione. Ed infatti: se $F(y)$ è il primo membro di una equazione algebrica reciproca, si ha: $F(y) = G \pm y^m G_1$, e da questa, solo cambiando l'operazione di innalzamento a potenza r^{esimo}, con la operazione θ^r, si ha la formula $A(y) = G(y) \pm \theta^n\overline{G}(y)$, provata nella prima parte di questo studio.

Fisica. — *Studio sperimentale sopra la capacità dei condensatori* (1). Nota dell'ing. Ferdinando Lori, presentata dal Socio Blaserna.

Le esperienze, che riferisco in questa Nota, hanno avuto per iscopo la determinazione, in diverse condizioni di carica, del rapporto fra la capacità di un condensatore, in cui il dielettrico fosse aria secca, e quella di un condensatore, in cui il dielettrico fosse carta paraffinata o mica od ebanite o vetro. Il circuito elettrico adoperato è quello della qui annessa figura, in cui C_1 C_2 sono i due condensatori, l'uno, quello che si vuole studiare, l'altro quello

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica tecnica della R. Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Roma.

ad aria: G_1 G_2 sono due galvanometri. che adoperavo come balistici, l'uno del tipo Siemens, a due bobine, con magnete a campana, l'altro del tipo Thomson, con quattro bobine, a magneti rettilinei; M una sfera metallica.

L'esperienza veniva condotta così: Toccando per un istante la sfera M con una delle armature di una bottiglia di Leyda, che era caricata da una macchina elettrostatica, e della quale l'altra armatura era in comunicazione

con la terra, io caricavo i due condensatori. La scarica della bottiglia si divideva in due parti attraverso i circuiti dei due condensatori: queste parti dovevano essere evidentemente proporzionali alla loro capacità, ed erano entrambe misurate dai due galvanometri. Supposta costante la capacità del condensatore ad aria, la lettura al galvanometro in comunicazione con esso era proporzionale alla differenza di potenziale creata fra le armature dell'altro condensatore, ed alla carica di queste era invece proporzionale la lettura all'altro galvanometro.

Il rapporto delle deviazioni massime dei due galvanometri risultò sempre costante, entro i limiti di precisione delle misure: può adunque concludersi che anche il rapporto fra le capacità dei due condensatori era costante. Le prove furono ripetute con condensatori di mica, di carta paraffinata, di ebanite, di vetro. Le differenze di potenziale raggiunte furono di circa 100 volta per la mica e per la carta paraffinata; circa 1000 volta per l'ebanite e pel vetro. Lo spessore del dielettrico era diverso nei diversi casi, e il campo in cui esso risultò immerso raggiunse per ogni condensatore circa $\pm$ 16 unità *c g s* del sistema elettrostatico. Tali limiti sono superiori a quelli raggiunti dagli altri sperimentatori, che hanno studiato lo stesso fenomeno.

Come esempio io riferisco qui appresso una serie di esperienze relative al condensatore di ebanite. Nella tabella le colonne di ordine pari contengono le letture fatte nel galvanometro in comunicazione col condensatore di ebanite, mentre quelle di ordine dispari contengono le letture fatte nel gal-

vanometro in comunicazione col condensatore ad aria. I numeri rappresentano le divisioni delle scale.

88	88	79	79	68	68	171	170	54	53	74	74
118	117	71	71	49	49	161	166	46	48	73	75
41	42	72	91	69	70	118	123	45	46	109	111
155	160	66	66	64	64	136	141	96	98	64	65
92	90	90	90	74	73	42	42	52	52	71	70
59	58	68	68	53	53	82	82	46	46	53	53
87	85	92	90	68	69	51	51	73	73	67	68
153	150	70	70	82	81	75	74	76	76	51	51
78	78	94	95	90	90	—	—	—	—	68	68

Le due capacità del condensatore di ebanite e di quello ad aria, le costanti dei due galvanometri, e le distanze delle scale dagli specchi, si erano combinate per caso in modo che il rapporto fra le due letture fosse circa l'unità.

Quanto alla precisione delle misure, debbo osservare che lo zero del galvanometro di Thomson non si manteneva rigorosamente costante per difetto nella sospensione del sistema mobile, e che ambedue i galvanometri erano notevolmente disturbati dalla corrente delle tramvie elettriche della città, la quale imprimeva deviazioni balistiche anche di due intere parti della scala. Perciò l'errore probabile delle misure era dell'ordine delle differenze che si osservano fra i rapporti delle deviazioni dei due galvanometri, e può affermarsi che nei limiti di precisione delle misure la capacità del condensatore di ebanite è risultata costante.

Pei condensatori di mica e di carta paraffinata è accaduto esattamente lo stesso; solamente per quelli a vetro la legge non è stata verificata colla medesima esattezza, ed è apparsa qualche deviazione piccola, ma tutt'affatto irregolare. Io qui trascrivo senz'altro i rapporti fra le letture coi due galvanometri per tre serie di esperienze fatte col vetro, scelte fra quelle che presentano maggiori deviazioni dalla legge enunciata.

	1.61	1.31	1.50
	1.58	1.57	1.52
	1.62	1.53	1 53
	1.54	1.53	1.51
	1.52	1.54	1.54
	1 62	1.61	1.50
	1.50	1.50	1.54
	1.51	1.45	1.53
	1.53	—	—
	1.56	—	—
Medie . . .	1.549	1.506	1.521

Da tutto quanto ho qui riferito e da quanto ho scritto nella Nota precedente appare sufficientemente dimostrato che, entro i limiti di forza elettrica da me adoperati, e pei dielettrici da me studiati, il rapporto fra le quantità di elettricità che un condensatore riceve o abbandona durante una carica o scarica balistica e la variazione del suo potenziale per effetto della stessa carica o scarica è costante, intendendosi per balistica quella carica o scarica, che si compie in un tempo molto breve, come avviene quando le due armature sono riunite mediante un circuito elettrico di una piccola resistenza. Assumendo quel rapporto come misura della capacità, questa si deve ritenere costante, qualunque sia il momento della storia elettrica del condensatore, in cui essa viene misurata. E dalle mie esperienze sorge logica l'opportunità di assumere appunto come misura della capacità il rapporto, di cui ho parlato, modificando nel modo seguente l'ordinaria definizione:

Chiamasi capacità di un condensatore il rapporto fra la diminuzione o l'aumento della sua carica e la diminuzione o l'aumento del suo potenziale, che si ottengono durante una carica o una scarica balistica.

La parola capacità acquista in tal modo un significato preciso e il valore che ne deriva pel potere induttore specifico è costante, mentre la permeabilità magnetica delle sostanze magnetiche è per sua natura variabile. La capacità, che può dirsi apparente, che si ottiene facendo il quoziente della variazione di carica e della variazione di potenziale che si ottengono durante una carica, la quale duri un certo tempo, non molto breve, non è costante e dipende anche da questo tempo pel fenomeno della penetrazione della carica, mentre la permeabilità magnetica delle sostanze magnetiche non dipende mai dalla durata del fenomeno che si prende per base della misura.

Se l'isteresi elettrostatica, intesa nello stesso senso di quella magnetica, non esiste, i fenomeni studiati dallo Steinmetz e dall'Arnò di dissipazione di energia nei dielettrici, debbono essere attribuiti ad una causa diversa. Io appunto concluderò questo studio mostrando come una delle spiegazioni possibili, almeno qualitativamente, si ottenga considerando in un certo modo speciale il fenomeno della penetrazione della carica.

Farò il caso più semplice di un condensatore a facce piane e parallele, di superficie S, di capacità C, costituito da uno strato di dielettrico di spessore e, omogeneo, di potere induttore specifico ε, compreso fra due piani metallici, uno dei quali sia in comunicazione con la terra, e l'altro sia caricato ad un potenziale alternativo sinusoidale:

$$V = V_0 \, sen wt.$$

Tutti i punti di un piano parallelo a quelli che limitano il condensatore, collocato alla distanza $e - x$ da quello in comunicazione con la terra,

e alla distanza x dall' altro, hanno nello stesso istante di tempo il potenziale comune:

$$V_x - \frac{e-x}{e} V_0 \, senwt.$$

Tutti i punti di un piano parallelo al precedente, alla distanza dx da esso, hanno il potenziale:

$$V_{x+dx} = \frac{e-x-dx}{e} V_0 \, senwt.$$

Lo strato infinitesimo di dielettrico compreso fra questi due piani costituirebbe un condensatore, il cui potenziale sarebbe in ogni istante:

$$V_x - V_{x+dx} = \frac{dx}{e} V_0 \, senwt.$$

La capacità di questo condensatore sarebbe $C \frac{e}{dx}$: la quantità di elettricità delle sue armature sarebbe:

$$q = \pm C \frac{e}{dx} (V_x - V_{x+dx}) = \pm C \, V_0 \, senwt.$$

Ora io suppongo che il fenomeno della penetrazione della carica possa essere rappresentato analiticamente, scrivendo la quantità q nel modo seguente:

$$q = \pm C \, V_0 \, sew \quad (wt - kx).$$

essendo k una quantità costante. Ammetto cioè che la polarizzazione provocata dalla carica dell' armatura che ricuopre il dielettrico, non si propaghi immediatamente fino all' armatura opposta, ma essa si propaghi con velocità finita per modo che esista in ogni molecola del dielettrico uno spostamento di fase fra il potenziale e la polarizzazione, e questo spostamento di fase aumenti coll' aumentare della distanza della molecola polarizzata dall' armatura del condensatore che subisce la carica e provoca la polarizzazione.

Il lavoro di elettrizzazione dello strato infinitesimo che consideriamo durante il periodo $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ è:

$$dL = \int_{t=0}^{t=\tau} q \frac{\partial}{\partial t} (V_x - V_{x+dx}) \, dt = \int_{t-0}^{t=\tau} \frac{\omega \, CV_0^2}{e} dx \, \text{sen}(wt - kx) \cos wt \, dt \, .$$

E l' energia dissipata durante l' elettrizzazione è:

$$dW = \frac{1}{\tau} \int_{t=0}^{t=\tau} \frac{w \, CV_0^2}{e} \, \text{sen} \, (wt - kx) \cos wt \, dt = - \frac{\omega \, CV_0^2}{2e} \, \text{sen} \, kx \, dx \, .$$

L'energia dissipata da tutto il condensatore è:

$$W = -\int_{x=0}^{x=e} \frac{\omega C V_0^2}{2e} \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{\omega C V_0^2}{ke} \operatorname{sen} \frac{2ke}{2}$$

Trascurando le potenze del prodotto ke superiori alla terza, si può scrivere:

$$W = \frac{\omega C\, V_0^2 ke}{4}.$$

Se si indica con v la velocità con cui si propaga la polarizzazione, il tempo dopo il quale essa giunge alla distanza xv è $t_0 = \frac{x}{v}$.

Dalle nostre formole risulta:

$$\omega t_0 = kx = \frac{\omega x}{v}:$$

donde:

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Chiamando n il numero di alternazioni del potenziale al secondo è $\omega = 2\pi n$; e, sostituendo a k ed ω nell'ultima espressione di W i loro valori:

$$k = \frac{\omega}{v} \qquad\qquad \omega = 2\pi n,$$

si ottiene:

$$W = \frac{\pi^2 C V_0^2 n^2 e}{v}.$$

Essendo: $C = \frac{S\varepsilon}{4\pi e}$, si può anche scrivere:

$$W = \frac{\pi\varepsilon S V_0^2 n^2}{4v}.$$

La perdita di energia per centimetro cubo risulta così:

$$(1) \quad W^1 = \frac{\pi\varepsilon V_0^2 n^2}{4ve}.$$

I dielettrici adunque, che presentano il fenomeno della penetrazione della carica, debbono presentare anche quello della dissipazione dell'energia durante una elettrizzazione alternativa.

Le esperienze, già da me citate, dello Steinmetz, il quale ha misurato con l'elettrodinamometro l'energia della corrente alternativa attraversante il circuito di un condensatore, confermano che l'energia stessa sia propor-

zionale al quadrato della differenza massima di potenziale V_0. Allo stesso risultato non conducono quelle dell'Arnò, ma il campo da lui adoperato non era uniforme, e quindi esse non possono considerarsi come una contradizione definitiva colla formola (1). Non conosco esperienze, le quali mostrino la variazione di W in funzione di n e di e. Esse sarebbero molto importanti. Ma al mio ragionamento per ora non attribuisco altro scopo, che quello di dimostrare come i fenomeni di dissipazione di energia nei dielettrici, i quali sono di esistenza indiscutibile, debbono e possono essere spiegati indipendentemente da un fenomeno di vera isteresi elettrostatica contro la esistenza del quale stanno le mie esperienze.

Ho intanto iniziato una serie di ricerche per istudiare la variazione di W_1 in funzione di n.

Fisica. — *La conduttività termica nelle rocce della campagna romana. Misura dei calori specifici e delle densità* [1]. Nota del dott. Francesco Morano, presentata dal Socio Blaserna.

Ho istituito alcune ricerche per determinare la conduttività termica nelle principali rocce della campagna romana. A tal uopo ho preferito di dare ai campioni da me studiati la forma di un disco che suppongo di dimensioni finite: ne sia d l'altezza e ϱ il raggio. Se il movimento del calore vi procede simmetricamente all'asse, la temperatura ϑ per ogni punto di esso disco è una funzione delle sue coordinate geometriche x ed r e del tempo t, e l'equazione di propagazione è:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right) \qquad (\alpha)$$

dove: $a^2 = \dfrac{k}{c\delta}$;

k è il coefficiente di conduttività interna;

c il calore specifico;

δ la densità.

Chiamando inoltre h il coefficiente di conduttività esterna, le condizioni di esperienza davano luogo alle seguenti equazioni:

$$\text{per } x = d \qquad k\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = h\vartheta \qquad (\beta)$$

$$\text{per } r = \varrho \qquad k\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = h\vartheta \qquad (\gamma)$$

$$\text{per } x = 0 \qquad \vartheta = \vartheta_0 \qquad (\delta)$$

$$\text{per } t = 0 \qquad \vartheta = 0 \qquad (\varepsilon)$$

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.

La (α) vien soddisfatta ponendo

$$\vartheta = \text{sen}\, \alpha x \, J_0(\beta r)\, e^{\gamma t} \tag{ξ}$$

essendo J_0 la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero. Sostituendo in (α) questo valore di ϑ le quantità $\alpha\ \beta\ \gamma$ risultano legate fra loro dalla relazione

$$\gamma = - a^2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Inoltre perchè vengano soddisfatte (β) e (γ) le α e β debbono essere radici delle equazioni

$$\alpha = \frac{h}{k} \text{tg}\, \alpha d \tag{η}$$

$$\beta = - \frac{h}{k} \frac{J_0(\beta \varrho)}{J_1(\beta \varrho)} \tag{ϑ}$$

essendo J_1 la funzione di Bessel di prima specie e di primo ordine.

Infine si soddisfa a (δ) ed (ε) se invece di (ξ) scrivo

$$\vartheta = \vartheta_0 \left\{ 1 - \sum A_n \,\text{sen}\, \alpha_n x\, e^{-a^2 \alpha_n^2 t} \sum B_q\, J_0(\beta_q r)\, e^{-a^2 \beta_q^2 t} \right\} \tag{ι}$$

determinando i coefficienti A e B in modo da essere

$$\sum A_n \,\text{sen}\, \alpha_n x = 1 \tag{$\varkappa$}$$

$$\sum B_q\, J_0(\beta_q r) = 1 \tag{λ}$$

Per determinare le A scrivo

$$y_n = \text{sen}\, \alpha_n x .$$

La $(\varkappa)$ diventa

$$\sum A_n\, y_n = 1 \tag{μ}$$

La funzione y soddisfa di sua natura le relazioni

$$y_n'' + \alpha_n^2 y_n = 0$$

$$y_p'' + \alpha_p^2 y^p = 0 .$$

Da queste due ricavo

$$(\alpha_n^2 - \alpha_p^2)\, y_n y_p = y_n y_p'' - y_p y_n''$$

ed integrando fra zero e d

$$(\alpha_n^2 - \alpha_p^2) \int_0^d y_n y_p \, dx = \left| y_n y_p' - y_p y_n' \right|_0^d \tag{ν}$$

Il secondo membro è identicamente nullo al limite inferiore, e si annulla anche al limite superiore per la (η). Resta dunque

$$(\alpha_n^2 - \alpha_p^2) \int_0^d y_n y_p \, dx = 0$$

onde ricavo

$$\int_0^d y_n y_p \, dx = 0 \qquad \text{per } n \lesseqgtr p \tag{o}$$

Deduco allora da (μ) moltiplicando per y_p

$$\sum A_n y_n y_p = y_p$$

ed integrando fra zero e d

$$\sum A_n \int_0^d y_n y_p \, dx = \int_0^d y_p \, dx \, .$$

In quest' ultima eguaglianza son nulli per la (o) tutti i termini che formano il primo membro tranne quello in cui è $n = p$; si ha dunque

$$A_n = \frac{\int_0^d y_n \, dx}{\int_0^d y_n^2 \, dx} \tag{π}$$

Quivi è al numeratore

$$\int_0^d y_n \, dx = \frac{2}{\alpha_n} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha_n d \, .$$

Il denominatore poi si calcola facilmente dalla (ν) che dà

$$\int_0^d y_n y_p \, dx = \frac{|y_n y'_p - y_p y'_n|_{x=d}}{\alpha_n^2 - \alpha_p^2} \, .$$

Facendo quivi tendere p ad n e risolvendo l'indeterminazione che ne risulta al secondo membro si ottiene

$$\int_0^d y_n^2 \, dx = \frac{1}{2\alpha_n} \left(\alpha_n d - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha_n d \right) .$$

Sostituendo nella (π) i valori trovati si ottiene

$$A_n = \frac{4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha_n d}{\alpha_n d \left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_n d}{2\alpha_n d} \right)} \tag{ϱ}$$

Parimente per determinare le B di (λ) osservo che la funzione J_0 soddisfa di sua natura le relazioni

$$\frac{d}{dr} r \frac{d J_0(\beta_q r)}{dr} + \beta_q^2 r J_0(\beta_q r) = 0$$

$$\frac{d}{dr} r \frac{d J_0(\beta_s r)}{dr} + \beta_s^2 r J_0(\beta_s r) = 0 .$$

Di qui ricavo

$$(\beta_q^2 - \beta_s^2) J_0(\beta_q r) J_0(\beta_s r) r = J_0(\beta_q r) \frac{d}{dr} r \frac{d J_0(\beta_s r)}{dr} - J_0(\beta_s r) \frac{d}{dr} r \frac{d J_0(\beta_q r)}{dr}$$

ed integrando fra zero e ϱ

$$(\beta_q^2 - \beta_s^2) \int_0^\rho J_0(\beta_q r) J_0(\beta_s r) r\, dr = \left| r \left\{ \beta_q J_0(\beta_s r) J_1(\beta_q r) - \beta_s J_0(\beta_q r) J_1(\beta_s r) \right\} \right|_0^\rho \quad (\sigma)$$

Quivi il secondo membro è sempre nullo al limite inferiore e si annulla anche al limite superiore per la (ϑ). Si ha dunque

$$(\beta_q^2 - \beta_s^2) \int_0^\rho J_0(\beta_q r) J_0(\beta_s r) r\, dr = 0$$

donde ricavo

$$\int_0^\rho J_0(\beta_q r) J_0(\beta_s r) r\, dr = 0 \qquad \text{per } q \gtrless s \qquad (\tau)$$

Moltiplicando allora la (λ) per $J_0(\beta_s r) r$ ottengo

$$\sum B_q J_0(\beta_q r) J_0(\beta_s r) r = J_0(\beta_s r) r$$

ed integrando fra zero e ϱ

$$\sum B_q \int_0^\rho J_0(\beta_q r) J_0(\beta_s r) r\, dr = \int_0^\rho J_0(\beta_s r) r\, dr$$

dove per la (τ) son nulli tutti i termini del primo membro tranne quello in cui $q = s$; se ne ricava dunque

$$B_q = \frac{\int_0^\rho J_0(\beta_q r) r\, dr}{\int_0^\rho J_0^2(\beta_q r) r\, dr} . \qquad (v)$$

Quivi è pel numeratore

$$\int_0^\rho J_0(\beta_q r) r\, dr = \frac{\varrho}{\beta_q} J_1(\beta_q \varrho) .$$

Per avere il denominatore ricavo dalla (σ)

$$\int_0^\rho J_0(\beta_q r) J_0(\beta_s r) r\, dr = \frac{\left| r \left\{ \beta_q J_0(\beta_s r) J_1(\beta_q r) - \beta_s J_0(\beta_q r) J_1(\beta_s r) \right\} \right|_{r=\rho}}{\beta_q^2 - \beta_s^2} .$$

Facendo quivi tendere s a q e risolvendo l'indeterminazione che nasce al secondo membro si ha

$$\int_0^\rho J_0^2(\beta_q r)\, r\, dr = \frac{\rho^2}{2} \left\{ J_0^2(\beta_q \rho) + J_1^2(\beta_q \rho) \right\}.$$

Sostituendo in (v) questi valori si ha

$$B_q = \frac{2 J_1(\beta_q \rho)}{\beta_q \rho \left\{ J_0^2(\beta_q \rho) + J_1^2(\beta_q \rho) \right\}} \qquad (\varphi)$$

Determinate in questo modo le A e le B, restano completamente soddisfatte tutte le condizioni del problema, e di più le due serie ($\varkappa$) e (λ) risultano evidentemente convergenti. Dico inoltre che sono convergenti anche le due serie:

$$\sum A_n \operatorname{sen} \alpha_n x\, e^{-a^2 \alpha_n^2 t} \qquad \sum B_q\, J_0(\beta_q r)\, e^{-a^2 \beta_q^2 t} \qquad (\chi)$$

che compariscono nella (ι). Infatti le α e β sono le radici successive delle equazioni (η) e (ϑ); dunque le due successioni

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \dots \alpha_n \dots \qquad \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \dots \beta_n \dots$$

sono crescenti, e sono invece decrescenti le successioni

$$e^{-a^2\alpha_1^2 t}\ e^{-a^2\alpha_2^2 t}\ e^{-a^2\alpha_3^2 t} \dots e^{-a^2\alpha_n^2 t} \dots \qquad e^{-a^2\beta_1^2 t}\ e^{-a^2\beta_2^2 t}\ e^{-a^2\beta_3^2 t} \dots e^{-a^2\beta_n^2 t} \dots \ (\psi)$$

Se dunque sono convergenti le serie ($\varkappa$) e (λ) sono anche convergenti le due serie (χ) che si ottengono moltiplicando ciascun termine delle ($\varkappa$) e (λ) per ciascun termine delle (ψ). Come dimostrerò più chiaramente con un esempio numerico, la convergenza delle (χ) è molto rapida, sì da poterle arrestare ciascuna al suo primo termine. La (ι) allora può scriversi

$$\vartheta = \vartheta_0 \left\{ 1 - A_1 B_1 \operatorname{sen} \alpha_1 x\, J_0(\beta_1 r)\, e^{-a^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2) t} \right\}.$$

Se ora in un punto di coordinate x ed r vengono osservate le temperature $\vartheta_1 \vartheta_2$ in due istanti $t_1\, t_2$ dalla precedente, si ricava

$$k = \frac{c\delta}{(\alpha^2 + \beta^2)\, t} \operatorname{lognat} \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{\vartheta_0 - \vartheta_2} \qquad (\omega)$$

avendo messo $t_2 - t_1 = t$, e trascurati gl'indici alle quantità α e β.

La (ω) insieme alla (η) e (ϑ) ci dà la costante richiesta k.

Dalle formole occorrenti pel calcolo numerico di k si rileva che per ogni sostanza occorre conoscere previamente il calore specifico, la densità e

la conduttività esterna. Esporrò brevemente per ognuno di questi elementi i risultati delle mie ricerche.

Le rocce da me sperimentate sono le seguenti:

1°. Calcare compatto di Tivoli.
2°. Calcare fibroso detto Tartaro di Tivoli.
3°. Calcare incrostante detto Travertino di Tivoli.
4°. Lava basaltina detta Selce dell' Appia antica.
5°. Trachite di Viterbo.
6°. Peperino di Marino.
7°. Terracotta dai cocci del Testaccio.
8°. Tufo di Roma (fuori Porta Portese).

Calori specifici. — Per la determinazione dei calori specifici ho adoperato il metodo delle mescolanze. La formola relativa è

$$c = \frac{\Pi}{p} \frac{\vartheta - \vartheta_0 + \delta\vartheta}{\vartheta_1 - \vartheta - \delta\vartheta}$$

dove:

c è il calore specifico del corpo;
p il peso;
ϑ_1 la sua temperatura al momento che viene immerso nel calorimetro;
Π il peso in acqua del calorimetro;
ϑ_0 la sua temperatura al momento in cui il corpo vi viene immerso;
ϑ la sua temperatura al termine dell' esperienza;
$\delta\vartheta$ la correzione dovuta alla perdita esterna di calore durante l'esperienza. La temperatura del calorimetro al principio dell' esperienza era tenuta sensibilmente eguale a quella dell' ambiente.

Ho eseguito per ogni roccia tre prove sopra campioni distinti. Ecco un quadro dei dati e dei risultati.

Tabella relativa ai calori specifici.

	Π	p	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	$\delta\vartheta$	c	
Calcare	460.226	75.018	11°.89	99°.90	14°.78	0°.11	0.2165	
	459.940	80.080	16.30	99.24	18.90	0.09	0.2161	$c = 0.2166$
	459.940	81.850	16.50	99.24	19.46	0.12	0.2173	
Tartaro	460.269	74.357	11.63	99.81	14.60	0.08	0.2218	
	460.012	76.708	14.50	99.81	17.39	0.16	0.2224	$c = 0.2221$
	460.012	72.253	12.68	99.91	15.50	0.12	0.2221	
Travertino . . .	460.226	73.447	11.35	99.91	14.30	0.06	0.2205	
	460.075	74.430	13.60	99.51	16.38	0.22	0.2237	$c = 0.2218$
	460.269	87.679	10.67	99.71	14.08	0.19	0.2212	
Lava	460.133	54.431	13.31	99.78	15.30	0.04	0.2032	
	460.226	56.875	10.87	99.60	13.00	0.05	0.2038	$c = 0.2034$
	459.940	79.347	16.60	99.24	19.28	0.12	0.2033	
Trachite	460.133	59.257	13.20	99.71	15.36	0.09	0 2073	
	460.012	76.893	15.35	98.85	18.07	0.07	0.2071	$c = 0.2072$
	460.075	74.024	14.29	99.80	16.90	0.18	0.2073	
Peperino	459.940	58.168	18.20	99.11	20.57	0.22	0.2615	
	460.075	69.810	18.20	99.11	20.98	0.28	0.2590	$c = 0.2601$
	460.075	75.956	18.20	99.11	21.28	0.25	0.2599	
Terracotta . . .	460.133	52.552	12.80	99.48	14.88	0.06	0.2159	
	459.876	60.936	17.50	99.19	19.70	0.08	0.2167	$c = 0.2168$
	459.792	69.788	17.80	99.19	20.34	0.07	0.2178	
Tufo	459.940	47.505	19.10	99.73	21.47	0.31	0 3329	
	459.876	48.394	18.90	99.73	21.37	0.21	0.3265	$c = 0.3308$
	459.876	55.984	18.64	99.73	21.38	0.42	0 3331	

Densità specifica. — La determinazione della densità, trattandosi di corpi che assorbiscono molta acqua, veniva eseguita nel modo seguente. Dapprima determinavo il peso p_1 del corpo all' aria libera; quindi, tenendolo immerso nell' acqua sino a che ne restasse sufficientemente imbevuto, ne determinavo il peso p_2; dopo di che, cavatolo di nuovo dall' acqua ed asciugatolo all' esterno, ne determinavo il peso p_3. Se a è la densità dell' acqua nelle condizioni dell' esperienza, la densità del corpo è data da

$$\delta = a \frac{p_1}{p_3 - p_2}.$$

La formola dimostra che non è necessario per determinare p_2 e p_3 di attendere che il corpo resti immerso nell' acqua sino a saturazione completa. Basta invece che esso ne resti imbevuto in modo che appena eseguita la pesata p_2 lo si possa estrarre dall' acqua prima che altra ne penetri nell' interno di esso.

Il quadro seguente dà i risultati di due serie di misure eseguite su campioni distinti e le relative medie. Pel nostro caso però per valori di δ

riterremo quelli dati dalla prima serie, che è appunto formata da quei dischi che vennero adoperati nelle misure relative alla conduttività termica esterna ed interna.

Tabella per le densità.

Serie I: $a = 0.998654$

	p_1	p_2	p_3	δ
Calcare	36.282	22.879	36.324	2.6949
Tartaro	32.495	20.225	33.480	2.4481
Travertino . . .	32.881	20.245	33.162	2.5421
Lava	34.633	22.118	35.034	2.6778
Trachite	23.932	14.404	25.190	2.2158
Peperino	25.870	15.647	29.141	1.9120
Terracotta . . .	23.355	13.932	26.503	1.8564
Tufo	14.942	8.494	19.460	1.3607

Serie II: $a = 0.998654$.

	p_1	p_2	p_3	δ
Calcare	81.822	51.580	81.858	2.6994
Tartaro	76.579	47.243	78.536	2.4439
Travertino . . .	69.486	43.312	71.616	2.4517
Lava	53.940	34.589	54.840	2.6600
Trachite	58.423	36.324	62.280	2.2478
Peperino	56.203	36.142	67.738	1.7764
Terracotta . . .	52.052	31.200	59.352	1.8465
Tufo	31.503	17.300	40.270	1.3696

Valori medî:

Calcare	$\delta = 2.6971$
Tartaro	$\delta = 2.4460$
Travertino	$\delta = 2.4969$
Lava	$\delta = 2.6689$
Trachite	$\delta = 2\ 2318$
Peperino	$\delta = 1.8442$
Terracotta	$\delta = 1.8514$
Tufo	$\delta = 1.3651$

In un' altra Nota darò i risultati delle mie esperienze relative alla conduttività termica esterna ed interna.

Mineralogia. — *Su di alcuni nuovi minerali cobaltiferi e nichiliferi nella provincia di Messina* [1]. Nota I^a^. G. La Valle, presentata dal Socio Strüver.

Da tempo sono stati menzionati i giacimenti metalliferi che rinvengonsi in provincia di Messina nelle formazioni della catena dei monti Peloritani, la quale partendo dal Capo Rasocolmo sul Tirreno presso la punta del Faro, corre da nord-est verso sud-ovest; e nei Nebrodici che sono continuazione

[1] Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Messina.

della prima con ripiegamento verso ovest; e che formano, quest'ultimi, la parte nord della cintura di monti che circonda la valle dell'Etna sulla quale si èrge maestoso ed imponente il tanto celebrato Mongibello.

Ora essendo dietro a studiare i prodotti di tali giacimenti metalliferi, con l'intendimento d'illustrarli con una monografia, possibilmente completa, tanto più che in ogni tempo la speculazione ha tentato di trarre da essi profitto; mi è occorso di rinvenire minerali, i quali, per quanto io sappia, essendo nuovi pel nostro paese, ho creduto di farne menzione nella presente Nota.

Il Seguenza fin dal 1856 trattando dei minerali di Fiumedinisi e dintorni, descrive dei massi a ganga quarzifera, contenenti calcopirite, tetraedrite, ed un terzo minerale che per analisi chimica riferì ad ullmannite; mostrando così l'esistenza di composti nichiliferi.

Or nelle raccolte che continuamente ed incessantemente sto facendo con lo scopo succennato, mi è occorso di osservare che alcuni massi provenienti dal territorio di Mandanici sotto Portella Colomba in prossimità del Pizzo Cipolla sulla dorsale della catena peloritana, staccati da un giacimento costituito da calcare dolomitico in contatto con la fillade; presentano l'associazione od un'assieme di limonite, malachite, azzurrite miste a sostanza terrosa ocracea gialla più o mono friabile, o più o meno consistente.

In essi le superficie di facile discontinuità sono tappezzate da una patina color rosso cremisino, la quale alla lente mostra essere l'associazione di cristallini a struttura fibrosa ed a splendore perlaceo inclinante al vitreo. Avendo potuto staccare un gruppetto di tali cristallini, al microscopio ho visto trattarsi di cristalli ad aspetto monoclino appiattiti secondo {010}; ed ivi misurato l'angolo fra {100} e {001} mi risultò di circa 54°. Il Philips dà per l'Eritrina 55°.9'.

Inoltre su tal faccia {010} una direzione di massima estinsione fa l'ang. di circa 34° con l'asse Z verso $\bar{X}$.

Ho potuto notare che con {010} esistono faccie della forma {hol} ed {hko} probabilmente {101} la prima, {320} la seconda per la poco inclinazione di esse su {010}; oltre a faccette poco estese della forma {$\bar{h}$ol}.

Provata la colorazione della perla al borace, ho avuto un vetro bleu zaffiro che mi ha confermato trattarsi di Eritrina.

Associato a tal minerale negli stessi campioni, vi si osservano sparsi qua e là dei globuletti fioccosi di un bel verde pomo, sovrastanti o con attorno una patina colore indaco chiaro.

Raccolta separatamente di entrambe un pò di sostanza raschiando con punta di platino, ed osservando la omogeneità con la lente, le prove chimiche mi han dato quanto segue.

Per la prima:

La perla al borace dette un vetro di color bleu zaffiro.

Nel tubo aperto si ebbe acqua sulle pareti fredde di esso.

Sciolta in acido cloridrico si sciolse completamente dando una soluzione verde, che con ammoniaca in eccesso divenne di color zaffiro.

Inoltre parte della soluzione cloridrica, trattata con idrato di potassio ha dato un bel precipitato verde pomo insolubile in eccesso di reattivo.

Da tali risultati ritengo che tal minerale debba riferirsi all' Annabergite, isomorfa dell' Eritrite e con la quale spesso è associata nelle miniere cobaltifere, ove si ritengono prodotto di decomposizione di piriti cobaltifere, e nichilifere.

Per la seconda:

Nel tubo aperto si ebbe vapore acqueo, ed odore indefinibile, più deposito di una nubecola bianca velata ad una estremità del tubo. Il residuo divenne di color bruno nerastro.

Fatta la soluzione in acqua regia a caldo, per raffreddamento si ebbe un residuo in silice, probabilmente dovuto a parte della roccia incassante non potuta separare nella polvere.

La soluzione con ammoniaca, previa aggiunta di cloruro ammonico ha dato un precipitato (sesquiossido di ferro-idrato).

Col prussiato giallo si ebbe bleu di prussia.

Col solfocianato di ammonio si ebbe il noto color rosso-sangue.

Per tali reazioni resta accertata la presenza del ferro.

Parte della primitiva soluzione trattata con eccesso di acido nitrico e molibdato di ammonio, all' ebollizione si ebbe il caratteristico precipitato cristallino giallo-citrino, che si disciolse completamente con ammoniaca.

Inoltre col reattivo triplomagnesiaco, questa soluzione ha dato un' inalbamento bianco.

Da ciò si ebbe la certezza della presenza di acidi dell' arsenico, non potendo pensarsi, per l' associazione minerale data, che potesse trattarsi di composti del fosforo; e quindi si concluse che al minerale possa corrispondere la formula $Fe_3 As_2 O_8 + aq.$ della *Symplesite.*

Coi minerali fin' ora descritti è associata una sostanza bruna che alla lente si scinde in una patina granulare o globulare amorfa.

Anche di questa, raccoltane poca quantità, i saggi chimici han dato:

Per via secca in tubo chiuso deposito di acqua, e presso il saggio una tenue velatura di sublimazione. Nessun' odore apprezzabile.

La perla al borace ha dato un vetro spiccatamente turchino tanto a caldo che a freddo, il che accertò la presenza del cobalto. Su lamina di platino, un po' di sostanza trattata con qualche goccia di acido fosforico, scaldando si ebbe un deciso color bleu violetto, che per raffreddamento o per aggiunta di acqua passò a rosso-violetto, per il che si è svelato il manganese.

A maggior conferma, saggiato ancora su lamina di platino in presenza di carbonato di sodio e nitro si ebbe la nota colorazione del manganato di soda di un bel verde bluastro che a freddo è divenuto opaco.

Da ciò opino che tal minerale possa essere *asbolano* che suole anch' esso accompagnare i minerali di cobalto.

Tali minerali mi è occorso averli da altre località ove ho fatto fare apposite ricerche; difatti l' ho rinvenute sempre con la medesima associazione nel territorio di Savoca in contrada Botti, in roccia che superficialmente presenta limonite gialla ocracea terrosa frammista ad ocra rossa mista a malachite verde e ad un pulviscolo azurro sparso qua e là.

Nell' interno la roccia diviene più consistente, la massa principale resta ferrifera, ma nelle superficie di discontinuità, rompendo, vi si rinvengono i minerali sudescritti cobalto nichiliferi.

In campioni provenienti dal territorio di Roccalumera presso Nizza di Sicilia, e precisamente nel vallone Boccolia, si han delle roccie calcaro-silicee variegate contenenti associati i descritti minerali cobaltiferi per i quali indescrivibile rimane la colorazione generale di esse roccie.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 7 agosto 1898

Fisica terrestre. — *Sulla probabile presenza del Coronio e di nuovi elementi nei gas della Solfatara di Pozzuoli e del Vesuvio.* Nota del Corrispondente R. Nasini e di F. Anderlini e R. Salvadori [1].

Da qualche tempo abbiamo cominciato uno studio molto esteso sulle emanazioni terrestri italiane allo scopo di cercarvi l' argo, l' elio ed eventualmente nuovi elementi. Una prima parte di questo lavoro, *Gas delle terme di Abano, dei soffioni boraciferi della Toscana, gas combustibili dell' Appennino bolognese*, fu già pubblicata negli Atti di questa Accademia e nella Gazzetta chimica italiana [2]. Adesso stiamo completando lo studio dei Gas dei Campi Flegrei (Solfatara di Pozzuoli, Grotta del Cane, Grotta ammoniacale) e di quelli del Vesuvio. Nello spettro dei gas della grande bocca della Solfatara di Pozzuoli, che contengono argo, riscontrammo una riga abbastanza brillante la cui lunghezza d' onda sarebbe 531.5-531.6 e che sarebbe identica a quella ben nota della Corona 1474 K., la quale, come si sa, vuolsi attribuire ad un elemento non ancora scoperto, il coronio, elemento che do-

(1) Le esperienze su questi gas si poterono intraprendere mercè il sussidio che ci concesse l'Accademia nella seduta del 7 febbraio 1897, dietro proposta del prof. Cannizzaro, appoggiata dall'illustre e compianto Presidente prof. Brioschi. Sono assai lieto che gli studî cominciati promettano un risultato veramente importante per la scienza.

(2) R. Acc. dei Lincei. Memorie della Classe di Scienze fisiche ecc., serie 5ª, vol. II. Gazzetta chimica italiana, Anno XXVIII, parte I, pag. 81, anno 1898.

vrebbe essere assai più leggero dell'idrogeno; questa riga sin qui non era mai stata riscontrata in nessun prodotto terrestre. Oltre questa riga vi abbiamo poi riscontrate le seguenti: 653,5-595,5-536-2; e nello spettro dei gas di alcune fumarole del Vesuvio che pure contengono argo oltre la 595,5 abbiamo osservate le altre 769.5-631.8-572.5-536.5-441.5. Tutte queste righe non appartengono nè allo spettro dell' argo, nè a quello dell' elio: non presentano coincidenze o vicinanze che con alcune, poco importanti, di qualche elemento, come il ferro, il potassio, il titanio, la cui presenza non è affatto probabile nei gas da noi studiati e nelle condizioni in cui abbiamo esperimentato: qualche vicinanza o coincidenza vi sarebbe con alcune righe del mercurio osservate da Eder e Valenta, ma non avendo noi visto le righe le più brillanti di questo elemento e d'altra parte non essendoci mai apparse, in tante centinaia di osservazioni che abbiamo fatto, le righe di cui abbiamo parlato, così non crediamo che esse possano avere questa origine: la riga 572.5 è vicina a una di quelle dello spettro in righe dall'azoto, ma non crediamo che possa ad esso attribuirsi, giacchè sarebbe la sola che comparisce. Noi riteniamo assai probabile che si tratti, oltre che del coronio, di altri nuovi elementi gassosi e stiamo attivamente continuando i nostri studi, entro quei limiti che ci vengono imposti pur troppo dalla mancanza dei mezzi che sarebbero necessarî per condurre a termine con sicurezza questo lavoro.

Matematica. — *Le operazioni equivalenti alle loro aggiunte.* Nota del dott. E. Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Fra le teorie che nella Analisi matematica si presentano col maggior numero di caratteri fondamentali comuni e delle quali gli sviluppi possono, in qualche modo, essere considerati come paralleli, sono notevolissime quelle del calcolo infinitesimale e del calcolo alle differenze. La relazione fra queste teorie appare manifesta (come nota il Lacroix) (1) considerando che il calcolo differenziale può essere fondato sullo sviluppo delle funzioni in serie, il calcolo integrale fa conoscere nuove funzioni che non possono esprimersi che per mezzo di serie, ed il calcolo alle differenze, che nasce dalla considerazione generale delle serie, comprende il calcolo infinitesimale come caso speciale.

Sia nell'una che nell'altra di queste teorie, si presentano quistioni di egual natura, e la loro risoluzione può tentarsi con metodi al tutto simili. Mentre però, nel calcolo infinitesimale, l'applicazione di questi metodi si può sempre fare con la massima facilità e speditezza, in quello alle differenze vien complicata per la presenza di elementi che non si possono più

(1) *Traité du Calcul*, pag. 44 della Prefazione (edizione del 1810).

considerare come trascurabili, e per la distinzione del senso in cui si può supporre che avvengano gli incrementi della variabile a cui corrispondono le differenze finite della funzione.

In un recente lavoro *sulle forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte* (1) ho avuto occasione di notare (e credo per la prima volta) le contraddizioni a cui potrebbe condurre questo calcolo quando non fosse ben valutato il diverso significato che hanno le espressioni formate linearmente con le successive potenze dell'uno o dell'altro dei due simboli: $\theta\varphi = \varphi(x + \Delta x)$ $\theta^{-1}\varphi = \varphi(x - \Delta x)$.

Basta poi solo pensare al fatto che la formula di moltiplicazione per la operazione $\Delta\varphi = \theta\varphi - \varphi$ è a tre termini, che le funzioni che formano oggetto di questi studî non sono definite che in gruppi discreti di punti, e, considerate in campi continui, possono in generale essere discontinue e multiformi, per avere idea delle difficoltà che si presentano nello studio di questioni di qualche generalità, pertinenti al calcolo alle differenze. Così ancora si spiega perchè tali questioni, in questi ultimi tempi, sieno state poste in disparte nonostante che tutti ne riconoscano la grandissima importanza.

Molta parte però degli ostacoli, cui abbiamo accennato, può essere facilmente rimossa tenendo via diversa da quella fino ad ora seguita, e cioè riguardando il calcolo alle differenze come una specializzazione della teoria generale delle operazioni distributive, anzichè considerarlo come una generalizzazione del calcolo infinitesimale.

Il notevole sviluppo, che quelle teorie generali hanno avuto in questi ultimi anni, permettono di tentare questa nuova strada, ed io qui mi propongo di darne un esempio cercando le proprietà generali delle operazioni distributive coincidenti con le loro aggiunte, e mostrando come da queste si potrebbe partire per uno studio sistematico delle forme lineari alle differenze.

1. In una Nota: *Sulla operazione aggiunta* (2) il prof. Pincherle indica col simbolo

$$(\varphi, f)$$

una operazione, definita in modo qualunque, che applicata a due funzioni analitiche $\varphi(x), f(z)$, appartenenti a determinate classi S, S', dà per risultato due funzioni analitiche delle stesse classi, che è distributiva tanto rispetto ad f quanto rispetto a φ, che non fa mai corrispondere una stessa coppia di funzioni a due coppie distinte, e che ha la proprietà caratteristica

$$(x\varphi, f) = (\varphi, zf).$$

Intendendo poi di considerare solo quelle operazioni distributive che applicate a funzioni di S od S' danno risultati che sono contenuti in S od S', rispettivamente, dice che *una operazione distributiva* $\bar{A}$ *applicabile alle*

(1) Questi Rendiconti, fascicoli del 1° maggio e del 17 luglio 1898.

(2) Rendiconti Acc. di Bologna, Seduta del 17 aprile 1898.

funzioni di S′ *è aggiunta della operazione distributiva ed a determinazione unica* A *applicata alle funzioni di* S, *quando è identicamente*:

$$(1)\qquad \left(\mathrm{A}(\varphi), f\right) = \left(\varphi, \overline{\mathrm{A}}(f)\right).$$

Questa definizione comprende quelle, che ordinariamente si danno, di forme lineari, differenziali od alle differenze, aggiunte di forme date, come casi particolarissimi, e le proprietà generali, e le relazioni reciproche di due operazioni aggiunte, sono analoghe a quelle che furono trovate in quei casi speciali.

2. Se vogliamo che la operazione A coincida con la sua aggiunta, dobbiamo anzitutto supporre che essa sia applicabile sia alle funzioni di S che a quelle di S′, ed in secondo luogo dobbiamo ammettere che gli sviluppi in serie di potenze di D:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}(\varphi) = \sum \dfrac{\alpha_n(x)}{n!} \mathrm{D}^n \varphi \\ \overline{\mathrm{A}}(\varphi) = \sum \dfrac{(-1)^n}{n!} \mathrm{D}^n\left(\alpha_n(x) \cdot \varphi\right) \end{cases}$$ [1]

non differiscano che per un fattore costante k.

La condizione per la coincidenza di una data operazione con la sua aggiunta può dunque essere espressa con le relazioni identiche:

$$k\,(-1)^n \alpha_n(x)\, \mathrm{D}^n(\varphi) = \mathrm{D}^n\left(\alpha_n(x) \cdot \varphi\right).$$

O dalle altre:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\left(\alpha_n(x)\right) = 0 \\ \alpha_n = k\,(-1)^n \alpha_n. \end{cases}$$

Occorre cioè che tutte le α_n, *nello sviluppo* (2), *sieno costanti per la operazione* D, *ed il fattore* k *deve essere eguale a* ± 1.

Di qui ne viene che *si possono distinguere due tipi di operazioni coincidenti con le loro aggiunte:*

Diremo *del primo tipo* quelle che corrispondono a $k = 1$ e sono *direttamente eguali alle loro aggiunte* poichè, dalle (2) e (3), si ha identicamente:

$$(4)\qquad \mathrm{A}(\varphi) = \overline{\mathrm{A}}(\varphi).$$

Gli sviluppi in serie di potenze di D per queste operazioni sono della forma

$$(5)\qquad \mathrm{A}(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m}}{2m!} \mathrm{D}^{2m}(\varphi).$$

[1] Cfr. Pincherle, *Mém. sur le calcul fonctionnel,* § 77. (Mat. Ann., Bd. 49); *Sulla Op. Aggiunta,* n. 10.

Donde:

(6) $$A(\varphi) = A(-\varphi)$$

e per la (φf), e per le A di questo tipo, si ha:

(7) $$\big(A(\varphi), \varphi\big) = \big(\varphi, A(\varphi)\big).$$

Diremo *del secondo tipo* quelle che corrispondono a $k = -1$ e *sono eguali, ma di segno contrario* alle loro aggiunte. Per queste si ha dunque identicamente:

(8) $$A(\varphi) = -\overline{A}(\varphi)$$

e si hanno sviluppi della forma:

(9) $$A(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m+1}}{(2m+1)!} D^{2m+1}(\varphi).$$

Di qui si deduce:

(10) $$A(-\varphi) = -A(\varphi) = \overline{A}(\varphi).$$

Per la operazione (φ, f) e per le A di questo tipo, si ha:

(11) $$\big(A(\varphi), \varphi\big) = \big(\varphi, A(-\varphi)\big).$$

3. Al numero 6 della Nota citata il Pincherle ha dimostrato che: *Se* $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots \overline{X}$, *sono le aggiunte di* $A, B, C, \dots X$, *rispettivamente, e si ha* $X = A.B.C\dots$, *si ha ancora*: $\overline{X} = \cdots \overline{C}.\overline{B}.\overline{A}$. Ne segue che: *La aggiunta della potenza* n^{esima} *di una operazione distributiva a determinazione unica* A, *è la potenza* n^{esima} *della aggiunta.*

Da ciò, e da quanto si è visto al numero precedente si deduce che:

Se la operazione A *coincidente con la sua aggiunta è del primo tipo, e se, per qualunque funzione* φ, *si ha*:

$$A\, a_r \varphi = a_r A(\varphi) \; (r = 0, 1, \dots m),$$

anche tutte le operazioni della forma:

(12) $$B = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m,$$

sono del primo tipo.

Se poi la operazione A *è del secondo tipo, le operazioni*:

(13) $$B_1 = a_0 + a_2 A^2 + \cdots + a_{2m} A^{2m}$$

sono del primo tipo, e le operazioni:

(14) $$B_2 = a_1 A + a_3 A^3 + \cdots + a_{2m+1} A^{2m+1}$$

sono del secondo tipo.

4. Mostriamo ora come si possano effettivamente formare delle operazioni coincidenti con le loro aggiunte e dei tipi considerati.

Partiamo perciò da una operazione A_1 distributiva ed a determinazione unica definita dallo sviluppo

$$A_1(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} D^n(\varphi) \tag{15}$$

dove tutte le a_n sono periodi della D, e sono inoltre tali che anche la operazione:

$$A_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n!} D^n(\varphi) \tag{16}$$

è distributiva, a determinazione unica ed applicabile alle funzioni della classe S.

Si scorge immediatamente che la operazione:

$$C_1 = A_1 + A_2 = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m}}{2m!} D^{2m}(\varphi) \tag{17}$$

è direttamente eguale alla sua aggiunta, e che la operazione

$$C_2 = A_1 - A_2 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m+1}}{(2m+1)!} D^{2m+1}(\varphi) \tag{18}$$

è eguale alla contraria, in segno, della sua aggiunta.

5. In particolare, per $a_n = a^n$, si ha

$$A_1(\varphi) = \varphi(x+a) \qquad A_2(\varphi) = \varphi(x-a)\,,$$

posto $\Delta x = a$, si ha ancora

$$A_1(\varphi) = \theta\varphi \quad , \quad A_2(\varphi) = \theta^{-1}\varphi .$$

Da cui si vede che sono direttamente eguali alle loro aggiunte le operazioni:

$$B_1 = a_0\varphi + a_1(\theta + \theta^{-1})\varphi + a_2(\theta^2 + \theta^{-2})\varphi + \cdots + a_m(\theta^m + \theta^{-m})\varphi$$

che potremo anche scrivere:

$$B_1 = a_0\varphi + a_1\,\theta\varphi + \cdots + a_m\,\theta^m\varphi + a_0\varphi + a_1\,\theta^{-1}\varphi + \cdots + a_m\,\theta^{-m}\varphi .$$

Questa è una forma lineare alle differenze in cui entrano potenze positive e potenze negative di θ. Facendo il prodotto di questa per θ^m abbiamo la forma:

$$C_1 = \theta^m B_1 = a_m\,\theta^{2m} + a_{m-1}\,\theta^{2m-1} + \cdots + 2a_0\,\theta^m + \cdots + a_{m-1}\,\theta + a_m$$

che contiene sole potenze positive di θ e che, non è eguale, ma è soltanto equivalente alla sua aggiunta.

Se poniamo

$$a_0\theta^m + a_1\theta^{m-1} + \cdots + a_m = G$$

abbiamo

$$C_1 = G + \theta^{2m}\overline{G}$$

che, come è noto [1], è la espressione caratteristica delle forme di grado pari equivalenti alle loro aggiunte.

Similmente si ha dalla (18) la forma:

$$(20)\quad B_2 = a_1\theta + a_3\theta^3 + \cdots + a_{2m+1}\theta^{2m+1} - a_1\theta^{-1} - a_3\theta^{-3} - \cdots - a_{2m+1}\theta^{-(2m+1)}$$

che è eguale alla contraria, nel segno, della sua aggiunta.

La forma:

$$C_2 = \theta^{2m+1}B_2 =$$

$$= a_{2m+1}\theta^{4m+2} + a_{2m-1}\theta^{4m} + \cdots + a_1\theta^{2m+2} - a_1\theta^{2m} - a_3\theta^{2m-2} - \cdots - a_{2m+1}$$

con la trasformazione di variabile $\theta^2 x = \theta y$, si riduce nella:

$$C_2 = a_{2m+1}\theta^{2m+1} + a_{2m-1}\theta^{2m} + \cdots + a_1\theta^{m+1} - a_1\theta^m - a_3\theta^{m-1} - \cdots - a_{2m+1}.$$

Se qui pongo $-G = a_1\theta^m + a_3\theta^{m-1} + \cdots + a_{2m+1}$ ho la espressione

$$C_2 = G - \theta^{2m+1}\overline{G}$$

che è caratteristica delle forme lineari alle differenze di grado dispari equivalenti con le loro aggiunte [2].

6. Ammettiamo ora che gli elementi φ di S sieno le serie di potenze intere positive della variabile x convergenti entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio superiore ad un numero positivo r; e che gli elementi f di S′ sieno le serie di potenze intere e negative di x convergenti fuori di un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio inferiore ad r.

Seguendo le idee svolte dal prof. Pincherle nei suoi ultimi lavori, dovremo considerare gli elementi φ come *punti*, e gli elementi f come *piani* nello spazio ad infinite dimensioni.

Se la operazione A deve coincidere con la sua aggiunta bisogna anzitutto che applicata a punti dello spazio S riproduca punti dello stesso spazio, e che trasformi i piani di S′ in piani di questo spazio. Si consideri poi che una operazione A(φ) può essere definita mediante i punti che essa fa corrispondere alle potenze della variabile x cioè dalla:

$$(21)\qquad A(x^n) = a_{n.0} + a_{n.1}x + a_{n.2}x^2 + \cdots,$$

[1] Cfr. il n. 12 della Nota citata: *Sulle forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte.*

[2] Loc. cit. formule (36).

o dal quadro dei coefficienti:

$$(\mathrm{Q}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{0.0} \; , \; a_{0.1} \; , \; a_{0.2} \; , \dots \\ a_{1.0} \; , \; a_{1.1} \; , \; a_{1.2} \; , \dots \\ a_{2.0} \; , \; a_{2.1} \; , \; a_{2.2} \; , \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Si ricordi infine che il Pincherle ha trovato [1] ancora che, se come definizione della operazione (φ, f), si prende il residuo, per $x = 0$, di $f(x).\varphi(x)$, cioè $\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \varphi(x).f(x)\,dx$, la operazione $\overline{\mathrm{A}}$ è data dalla relazione:

$$\int_{(r)} \mathrm{A}(\varphi).f(x)\,dx = \int_{(r)} \varphi(x)\,\overline{\mathrm{A}}\big(f(x)\big)\,dx\,,$$

e per essa si ha il quadro:

$$(\mathrm{Q}') \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{0.0} \; , \; a_{1.0} \; , \; a_{2.0} \; , \dots \\ a_{0.1} \; , \; a_{1.1} \; , \; a_{2.1} \; , \dots \\ a_{0.2} \; , \; a_{1.2} \; , \; a_{2.2} \; , \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

che si ottiene da Q cambiando le linee in colonne.

Si scorge allora che: a) *La aggiunta della aggiunta è la operazione primitiva.* b) *Le operazioni*: $\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}.\overline{\mathrm{B}}$, $\mathrm{A}_2 = \overline{\mathrm{B}}.\mathrm{B}$, *coincidono con le loro aggiunte.* c) *La condizione perchè una operazione coincida con la sua aggiunta è che il quadro* (Q), *ad essa relativo, sia simmetrico rispetto alla diagonale principale.*

Segue da c) che: se tutti gli elementi a sinistra di una parallela alla diagonale principale sono nulli identicamente, sono nulli anche tutti quelli a destra della parallela simmetrica, da cui si deduce [2]: *Nelle operazioni coincidenti con le loro aggiunte le degenerescenze del primo e del secondo genere si trovano sempre accompagnate.*

7. La operazione che il Pincherle chiama *normale* e che è definita da

$$\mathrm{N}(x^n) = a_n\, x^n$$

o dal quadro:

$$(\mathrm{Q}) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} a_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & \dots \\ \dots & & & \end{array} \right.$$

è forse l'esempio più semplice di operazione coincidente con la sua aggiunta.

[1] *La operazione aggiunta*, n. 14.

[2] Cfr. Pincherle, *Appunti di calcolo funzionale.* Rend. Ist. Lomb., 15 luglio 1897; Rendiconti Acc. di Bologna, 30 gennaio e 17 aprile 1898.

La espressione di una forma alle differenze per mezzo del suo quadro Q cambia secondo che si intende che la variabile indipendente, rispetto a θ, sia la x, o sia il numero d'ordine n dei termini della serie di potenze che definisce la funzione $\varphi(x)$. Le proprietà formali della operazione rimangono però le stesse in entrambi i casi.

Nel primo caso infatti si ha:

$$(22)\qquad \mathrm{A}(x^n) = a_0 x^n + a_1(x+1)^n + \cdots + a_m(x+m)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k} \sum_{h=0}^{m} h^{n-k} a_h$$

Dunque.

$$(23)\qquad \begin{cases} a_{nk} = \binom{n}{k} \sum\limits_{h=0}^{m} h^{n-k} a_h & k = 0, 1 \dots n \\ a_{nk} = 0, & k > n. \end{cases}$$

$$(\mathrm{Q})\qquad \begin{vmatrix} 1 & , & 0 & , & 0, \dots \\ \sum h a_h & & \sum a_h & & 0, \dots \\ \sum h^2 a_h & & 2\sum h a_h & & 0, \dots \\ \dots & & \dots & & \dots \end{vmatrix}$$

Per la coincidenza della A con la $\overline{\mathrm{A}}$ dovremmo dunque avere:

$$(24)\qquad \binom{n}{k} \sum_{h=0}^{m} h^{n-k} a = 0, \qquad n \neq h.$$

Si vede facilmente di qui che si avrebbe identicamente

$$(25)\qquad a_1 = a_2 = \cdots = a_m = o_0$$

e la A si ridurrebbe alla operazione normale:

$$(26)\qquad \mathrm{N}x^n = a_0(x) x^n.$$

La ricerca delle forme che coincidono con il prodotto della loro aggiunta per una determinata potenza della θ si fa meglio ponendosi nel secondo caso, considerando cioè la operazione θ riferita agli indici dei termini delle serie da studiare.

La operazione A è così definita dalla relazione:

$$(27)\qquad \mathrm{A}(x^n) = x^n\Big(a_0(x)\, x^m + a_1(x)\, x^{m-1} + \cdots + a_m(x)\Big)$$

ed è quella stessa studiata dal Pincherle nella sua Nota: *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio* (1).

(1) Questi Rendiconti, seduta del 3 aprile 1898.

Il quadro di questa operazione:

$$(\mathrm{Q})\quad \left\{\begin{array}{llllll} a_0(0) & , a_1(0) & , a_2(0) \ldots a_m(0) & , 0 & , 0 \ldots\ldots\ldots \\ 0 & , a_0(1) & , a_1(1) \ldots a_{m-1}(1) & , a_m(1) & , 0 \ldots\ldots\ldots \\ 0 & , 0 & , a_0(2) \ldots a_{m-2}(2) & , a_{m-1}(2) & , a_m(2) \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

è quella matrice che ho sempre indicato con **M** e che ho spesso avuto bisogno di considerare nei miei studî sulle forme alle differenze.

Questo quadro non può manifestamente coincidere con Q' se non sono zero tutti gli elementi non situati sulla diagonale principale. Il che conferma quanto abbiamo più volte notato e cioè che: *Una forma lineare alle differenze in cui entrino potenze di θ tutte del medesimo segno, non può coincidere con la sua aggiunta senza ridursi ad una operazione Normale.*

Se vogliamo poi paragonare la A con la operazione $\theta^r \mathrm{A}$; per formare il quadro di quest'ultima basta togliere dal quadro (Q') le prime r linee e si ha così:

$$(\mathrm{Q}'')\quad \left\{\begin{array}{llllll} a_{r.0}(0) & , a_{r-1}(1) & , a_{r-2}(2) & , \ldots & , a_0(m-r) & , 0 , \ldots \\ a_{r+1}(0) & , a_r(1) & , a_{r-1}(2) & , \ldots & , a_1(m-r) & , a_0(m-r+1) , \ldots \\ a_{r+2}(0) & , a_{r+1}(1) & ; a_r\ (2) & , \ldots & , a_2(m-r) & , a_1(m-r+1) , \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

Perchè questo quadro (fatta astrazione dal fattore ± 1) coincida con (Q), dovranno anzitutto essere nulli tutti i coefficienti $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots a_m$, e la forma A non potrà essere di grado superiore ad r. Supponendo perciò $r \geqq m$, avremo le relazioni di condizione:

$$(28) \qquad \pm a_s = \theta^s a_{r-s} \qquad s = 0 , 1 \ldots m$$

che, per $m = r$, coincidono con quelle trovate ai nn. 11 e 12 della Nota citata sulle forme equivalenti allo loro aggiunte.

Per non allungare di troppo questa Nota, finirò col riportare lo sviluppo in serie di D:

$$\mathrm{A}(\varphi) = \sum_{p=1}^{m} (\Delta^p a_1 x + \Delta^p a_2 x^2 + \cdots - \Delta^p a_{m-1} x^{m-1}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{sm+p}}{(sm+p)!} \mathrm{D}^{sm+p}\big(\varphi(x)\big)$$

che, dalle (27) e (28), risultano per le forme $\mathrm{A}(\varphi)$ che sono coincidenti con $(-1)^m \theta^m \overline{\mathrm{A}}(\varphi)$.

Fisica. — *La conduttività termica esterna ed interna nelle rocce della campagna romana e l'andamento della temperatura nel suolo* [1]. Nota del dott. FRANCESCO MORANO, presentata dal Socio BLASERNA.

In altra Nota precedente [2] mi ero proposto di determinare la conduttività termica nelle rocce della campagna romana. Avendo prescelto di dare ai miei campioni la forma di disco le formole ivi dedotte pel calcolo numerico erano:

$$k = \frac{c\delta}{(\alpha^2 + \beta^2)\, t} \operatorname{lognat} \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{\vartheta_0 - \vartheta_2} \qquad (\eta)$$

$$\alpha = \frac{h}{k} \operatorname{tg} \alpha d \qquad (\theta)$$

$$\beta = -\frac{h}{k} \frac{J_0(\beta\varrho)}{J_1(\beta\varrho)}. \qquad (\omega)$$

Se ne inferisce essere necessario pel calcolo di k di conoscere precedentemente il calore specifico, la densità e la conduttività esterna.

Nell' altra Nota esposi i risultati delle mie esperienze per la determinazione dei calori specifici e delle densità. Ora dirò la via da me seguita ed i risultati da me ottenuti nella ricerca della conduttività termica esterna ed interna. Aggiungerò in forma di appendice alcune mie deduzioni sull' andamento annuo e diurno della temperatura nel suolo.

Conduttività esterna. — Per determinare la conduttività esterna di una sostanza ne prendo un certo volume V la cui superficie sia S, e dopo di averlo portato ad una temperatura ϑ_1 lo lascio raffreddare durante un tempo t in un ambiente la cui temperatura chiamo zero. Se la conduttività interna è grande rispetto all' esterna, la quantità di calore ceduta dal corpo all' ambiente durante un tempo dt è proporzionale alla temperatura media ϑ_c posseduta dal corpo durante quel tempo, alla sua superficie ed al tempo stesso, ossia

$$c\delta V\, d\vartheta_c = -h\vartheta_c S\, dt \qquad (a)$$

dove h è il coefficiente di proporzionalità ossia la conduttività esterna. Anche nel caso che la conduttività interna non sia molto grande rispetto all'esterna, quest' ultima eguaglianza è sostenuta se si dà alla t un valore discretamente piccolo. Integrando la (a) si ottiene

$$\vartheta_c = \vartheta_1\, e^{-\frac{h}{c\delta}\frac{S}{V}t}$$

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.

[2] Vedi questi Rendiconti, 2° sem., 1898, pag. 61.

donde ricavo

$$h = \frac{c\delta}{t} \frac{V}{S} \text{lognat} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_a}{\vartheta_c - \vartheta_a} \qquad (b)$$

avendo introdotto la temperatura dell' ambiente ϑ_a.

Le esperienze vennero eseguite col medesimo apparecchio di Regnault che si adopera pei calori specifici. Il corpo prendeva nella stufa la temperatura ϑ_1 e quindi era esposto alla temperatura dell' ambiente durante un certo tempo. La temperatura media ϑ_c del corpo alla fine di questo tempo veniva determinata immergendo immediatamente il corpo nel calorimetro. È chiaro che sarà:

$$\vartheta_c = \vartheta + \frac{\Pi}{pc} (\vartheta - \vartheta_0 + \delta\vartheta) \qquad (c)$$

adoperando le stesse notazioni che pei calori specifici.

Le dimensioni geometriche, trattandosi dei medesimi dischi adoperati per misurare le densità (Serie I) [1], venivano determinate nel modo seguente. Il volume può dedursi da quelle stesse esperienze essendo

$$V = \frac{p_3 - p_2}{a}.$$

L' altezza d veniva misurata con una vite micrometrica in varî punti del disco, donde deducevo la media. Il raggio e la superficie venivano calcolati dai precedenti elementi essendo

$$\varrho = \sqrt{\frac{V}{\pi d}}$$

$$S = 2\pi\varrho(\varrho + d).$$

Ecco i valori ottenuti:

Dimensioni geometriche.

	V	d	ϱ	S
Calcare	13.463	1.03	2.04	39.346
Tartaro	13.273	1.02	2.04	38.061
Travertino	12.934	1.00	2.03	38.700
Lava	12.933	1.04	1.99	37.873
Trachite	10.801	0.97	1.88	33.760
Peperino	13.512	1.04	2.03	39.237
Terracotta	12.588	0.98	2.02	38.082
Tufo	10.981	0.98	1.89	34.064

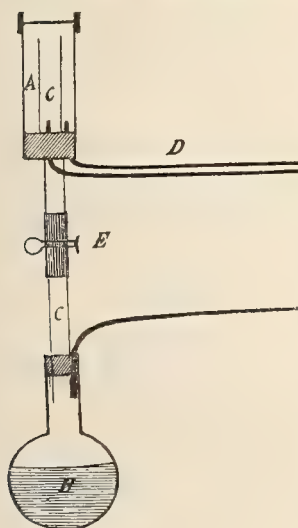
Nella seguente tabella scrivo tutti i valori relativi alle (c) e (b). Le p sono le medesime p_1 che compariscono nella tabella delle densità (Serie I) [2].

[1] Nota precedente citata.

[2] Ibid.

Tabella relativa alla conduttività esterna.

	t	Π	ϑ_0	ϑ	$\delta\vartheta$	ϑ_c	ϑ_a	ϑ_1	h	Medie
	s		°	°	°	°	°	°		
Calcare	60	204.514	15.10	17.92	0.02	91.83	15.5	99.30	0.000311	
	90	»	16.01	18.60	0.02	86.52	16.0	98.81	357	h=0.000 355
	120	»	16.11	18.50	0.04	81.74	16.0	99.51	398	
Tartaro	60	»	15.51	18.00	0.04	89.69	16 0	99.36	380	
	90	»	16.10	18.40	0.04	84.71	16.0	98.81	383	h=0.000 382
	120	»	16.30	18.47	0.03	80.81	16.0	99.13	383	
Travert.	60	»	14.60	17.21	0.00	90.40	16.0	99.31	355	
	90	»	15.70	18.05	0.03	84.79	15.5	98.81	386	h=0.000 377
	120	»	17.11	19.27	0.04	80.96	16.5	99.13	390	
Lava	60	»	15.72	18.18	0 11	92.79	16.0	99.31	253	
	90	»	15.33	17.70	0.04	87.96	15.0	98.81	295	h=0.000 296
	120	»	16.15	18.33	0.04	82.78	16.0	99.13	339	
Trachite	60	»	15.00	16.80	0.00	91.04	15.0	99.27	252	
	90	»	17.38	18 90	0.03	82.83	17.0	99.05	360	h=0.000 335
	120	»	16.61	17.98	0.04	76.13	16.0	98.90	393	
Peperino	60	»	14.95	17.29	0.08	90.84	15.0	99.16	296	
	90	»	17.10	19.18	0 07	84.53	16.5	99.05	369	h=0.000 383
	120	»	16.44	18.21	0.10	75.05	16.0	98.81	485	
Terrac.	60	»	16.04	17.74	0.03	87.62	15.5	99.30	333	
	90	»	17.13	18.67	0.04	82.49	17.0	99.05	341	h=0.000 373
	120	»	16.49	17.78	0.04	71.50	16.0	98.90	445	
Tufo	60	»	17.90	18.47	0.18	90.88	16.0	99.29	257	
	90	»	17.10	18.57	0.14	85.19	17 0	99.05	298	h=0.000 314
	120	»	16 67	17.87	0.21	76.21	16.0	99.00	388	

Conduttività interna. — L'apparecchio adoperato per le misure relative alla conduttività interna [1] consiste nella sua parte principale di un tubo di vetro A chiuso dalla parte superiore da una sottile lamina di rame. Il matraccio B conteneva dell'acqua in ebollizione il cui vapore poteva per mezzo del tubo C venir portato entro il tubo A; di qui per mezzo dei condotti D veniva portato fuori della stanza. Il disco da studiare veniva collocato sulla detta lamina di rame a tal uopo precedentemente amalgamata e ricoperta di un leggero strato di mercurio onde meglio assicurare il contatto. Sulla faccia superiore del disco e ad una medesima distanza dal centro mettevo dei granellini microscopici di sostanze fondenti a temperature distinte. Aprendo la chiave E, il vapor d'acqua invade il tubo A comunicando la sua temperatura alla lastra di rame e quindi alla base inferiore del disco sovrap-

[1] Vedi Meyer, *Zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit* etc. Wied. Ann. 1888, vol. 34.

posto. Le condizioni dell'esperienza sono in questo modo pienamente realizzate. Con un orologio veniva misurato l'intervallo di tempo fra la fusione dei due granellini sopra indicati.

Le sostanze adoperate a questo scopo erano:

1) L'Uretano fondente a 49°.

2) L'Acido palmitico " 62°.

L'esperienza ha dato per t i seguenti valori medie di molte misure:

Calcare	$t = 16^s$
Tartaro	$t = 20$
Travertino	$t = 22$
Lava	$t = 28$
Trachite	$t = 32$
Peperino	$t = 56$
Terracotta	$t = 47$
Tufo	$t = 100$

Prima di procedere avanti nei calcoli, occorre dimostrare la rapida convergenza delle due serie che entrano in (ι) [1]. Prendo ad es. la lava; si hanno per essa i seguenti valori:

$\alpha_1 d = 1.4669$	$\alpha_1 = 1.4105$	$\alpha_1^2 = 1.9895$	$A_1 = 1.3145$
$\alpha_2 d = 4.6796$	$\alpha_2 = 4.4996$	$\alpha_2^2 = 20.2466$	$A_2 = 0.4444$
$\alpha_3 d = 7.8345$	$\alpha_3 = 7.5332$	$\alpha_3^2 = 56.7487$	$A_3 = 0.2508$
$\alpha_4 d = 10.9818$	$\alpha_4 = 10.5594$	$\alpha_4^2 = 111.5014$	$A_4 = 0.1849$
$\beta_1 \varrho = 1.838$	$\beta_1 = 0.9239$	$\beta_1^2 = 0.8535$	$B_1 = 0.4291$
$\beta_2 \varrho = 3.466$	$\beta_2 = 1.7417$	$\beta_2^2 = 3.0335$	$B_2 = -0.1615$
$\beta_3 \varrho = 5.058$	$\beta_3 = 2.5417$	$\beta_3^2 = 6.4603$	$B_3 = 0.0912$
$\beta_4 \varrho = 6.640$	$\beta_4 = 3.3367$	$\beta_4^2 = 11.1342$	$B_4 = -0.0605$

L'andamento di questi termini giustifica l'ipotesi fatta da principio, di poterci cioè arrestare ai primi termini delle due serie (ι). Venendo ora ai calcoli finali per mezzo delle equazioni (η) (ϑ) (ω) si ottengono i seguenti risultati. Le d e ϱ sono date più sopra.

Tabella per la conduttività interna.

Calcare	$\alpha d = 1.5037$	$\alpha = 1.4599$	$\alpha^2 = 2.1313$
	$\beta\varrho = 1.863$	$\beta = 0.9133$	$\beta^2 = 0.8342$
Tartaro	$\alpha d = 1.4749$	$\alpha = 1.4460$	$\alpha^2 = 2.0909$
	$\beta\varrho = 1.841$	$\beta = 0.9048$	$\beta^2 = 0.8186$
Travertino . . .	$\alpha d = 1.4698$	$\alpha = 1.4761$	$\alpha^2 = 2.1788$
	$\beta\varrho = 1.835$	$\beta = 0.9024$	$\beta^2 = 0.8144$
Lava	$\alpha d = 1.4669$	$\alpha = 1.4105$	$\alpha^2 = 1.9895$
	$\beta\varrho = 1.838$	$\beta = 0.9238$	$\beta^2 = 0.8534$
Trachite	$\alpha d = 1.4071$	$\alpha = 1.4521$	$\alpha^2 = 2.1086$
	$\beta\varrho = 1.797$	$\beta = 0.9547$	$\beta^2 = 0.9115$
Peperino	$\alpha d = 1.3078$	$\alpha = 1.2551$	$\alpha^2 = 1.5752$
	$\beta\varrho = 1\ 737$	$\beta = 0.8550$	$\beta^2 = 0.7310$
Terracotta . . .	$\alpha d = 1.3003$	$\alpha = 1.3228$	$\alpha^2 = 1.7448$
	$\beta\varrho = 1.723$	$\beta = 0.8534$	$\beta^2 = 0.7283$
Tufo	$\alpha d = 1.1583$	$\alpha = 1.1847$	$\alpha^2 = 1.4034$
	$\beta\varrho = 1\ 667$	$\beta = 0.8823$	$\beta^2 = 0.7784$

(1) Nota precedente.

I valori che risultano per la costante k sono:

Calcare.	$k = 0.003\,620$
Tartaro	$k = 0.002\,749$
Travertino	$k = 0.002\,519$
Lava	$k = 0.002\,013$
Trachite	$k = 0.001\,398$
Peperino	$k = 0.001\,133$
Terracotta	$k = 0.001\,017$
Tufo	$k = 0.000\,607$

L'andamento della temperatura nel suolo. — Dai valori sopra trovati per la conduttività termica, ho cercato di determinare l'andamento annuo e diurno della temperatura nel suolo. Per una breve estensione la superficie terrestre può in questo caso riguardarsi come piana, ed il suolo sottostante può considerarsi come avente nel senso della profondità dimensioni infinite. Inoltre l'andamento della temperatura alla superficie del suolo nel periodo di un giorno o di un anno può, per una prima approssimazione, rappresentarsi con un coseno. La temperatura ϑ nel suolo sarà funzione del tempo t e della profondità z e dovrà soddisfare le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \qquad (1)$$

$$\vartheta = \varrho_1 \cos \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t \qquad \text{per } x = 0 . \qquad (2)$$

Di queste la prima è l'ordinaria equazione di propagazione secondo una sola direzione, la seconda è la condizione alla superficie. Inoltre T è il periodo annuo o diurno che si considera, ϱ_1 la semioscillazione della temperatura alla superficie del suolo. Le (1) e (2) son soddisfatte da

$$\vartheta = \varrho_0 + \varrho_1 e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{T}}}} \cos \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \left(t - \frac{z}{2a} \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\pi}} \right) . \qquad (3)$$

La (3) dimostra che per una certa profondità la temperatura media è sempre la stessa ϱ_0 che alla superficie, l'oscillazione completa è data da

$$\varrho = 2\varrho_1 e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{T}}}}$$

ed il periodo subisce un ritardo dato da

$$\tau = \frac{z}{2a} \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\pi}} .$$

Nei seguenti quadri darò per varie profondità i valori di ϱ e di τ dedotti dalle formole precedenti. I valori relativi alla superficie del suolo son dati da un lavoro del dott. Cancani ([1]).

In queste determinazioni l'unica quantità specifica variabile da una roccia all'altra è la costante $a = \sqrt{\frac{k}{c\delta}}$.

([1]) Cancani, *Valori normali ed andamento diurno ed annuo della temperatura di Roma.* Annali dell'Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica italiano, vol. XI, parte I, 1889.

Per essa si hanno i seguenti valori calcolati su i risultati avuti finora:

Calcare . . . . $a = 0.078\,748$
Tartaro. . . . . $a = 0.071\,109$
Travertino . . . . $a = 0.066\,845$
Lava . . . . $a = 0.060\,798$
Trachite . . . . $a = 0.055\,177$
Peperino . . . . $a = 0.047\,732$
Tufo . . . . $a = 0.036\,723$

Da questi calcoli ho esclusa la terracotta.

Andamento annuo. — Per l'andamento annuo i valori cavati dalla Nota suddetta relativamente alla superficie del suolo sono:

$\varrho_0 = 15^\circ.29$;

$2\varrho_1 = 19^\circ.3$;

temperatura massima $25^\circ.5$;

temperatura minima $6^\circ.2$;

epoca della temperatura massima, 23 luglio;

epoca della temperatura minima, 14 gennaio.

Dai calcoli si ottiene:

	$z = 1$ m.		$z = 2$ m.		$z = 3$ m.		$z = 4$ m.		$z = 5$ m.		$z = 6$ m.		$\varrho = 0^\circ.1$	
	ϱ	τ	ϱ	τ	ϱ	τ	ϱ	τ	ϱ	τ	ϱ	τ	z	τ
Calcare	$12^\circ.9$	23^g	$8^\circ.7$	47^g	$5^\circ.8$	70^g	$3^\circ.9$	93^g	$2^\circ.6$	116^g	$1^\circ.7$	140^g	$13^m.1$	306
Tartaro	12.4	26	7.9	52	5.1	77	3.3	103	2.1	129	1.3	155	11.9	»
Travertino	12.0	27	7.5	55	4.7	82	2.9	110	1.8	137	1.1	165	11.1	»
Lava	11.5	30	6.8	60	4.1	91	2.4	121	1.4	151	0.9	181	10.1	»
Trachite	10.9	33	6.1	66	3.5	100	2.0	133	1.1	166	0.6	199	9.2	»
Peperino	10.0	38	5.1	77	2.7	115	1.4	154	0.7	192	0.4	231	8.0	»
Tufo	8.2	50	3.5	100	1.5	150	0.6	200	0.3	250	0.11	300	6.1	»

Di qui possono con facilità dedursi i valori e le epoche delle temperature estreme. L'ultima colonna dà la profondità a cui l'oscillazione è un decimo di grado dove si può ammettere il piano invariabile.

Andamento diurno. — Per l'andamento diurno siccome l'ampiezza di oscillazione alla superficie del suolo è variabile nel corso di un anno, ho espresso per le varie profondità il valore di ϱ in frazione del suo valore alla superficie. Ho trovato:

	$z = 10$ cm.		$z = 20$ cm.		$z = 30$ cm.		$z = 40$ cm.	
	ϱ	τ	ϱ	τ	ϱ	τ	ϱ	τ
Calcare	0.4649	$2^h.55^m$	0.2162	$5^h.51^m$	0.1000	$8^h.46^m$	0.0468	$11^h.42^m$
Tartaro	0.4283	3.14	0.1834	6.29	0.0786	9.43	0.0336	12.57
Travertino	0.4057	3.27	0.1646	6.53	0.0668	10.20	0.0271	13.47
Lava	0.3709	3.47	0.1377	7.35	0.0510	11.22	0.0189	15.8
Trachite	0.3352	4.10	0.1124	8.21	0.0377	12.31	0.0126	16.42
Peperino	0.2827	4.50	0.0799	9.39	0.0226	14.29	0.0064	19.18
Tufo	0.1936	6.16	0.0375	12.33	0.0073	18.49	0.0014	25.5

L' andamento diurno della temperatura alla superficie del suolo è dato dalla seguente tabella ricavata anch'essa dal citato lavoro del Cancani:

		Temperatura minima	Ora della temperatura minima	Temperatura massima	Ora della temperatura massima
		o	ant.	o	pom.
Gennaio	1ª decade.	4.2	7	10.8	2
	2ª »	3 5	7	10.6	2
	3ª »	3.3	7	10.9	2
Febbraio	1ª »	4.0	6-7	11.6	2
	2ª »	4.5	6	12.4	2
	3ª »	5.5	6	13.4	2
Marzo	1ª »	5.4	6	13.8	2
	2ª »	6 6	6	14.7	1
	3ª »	7.4	5-6	15.6	1
Aprile	1ª »	8.7	5-6	17.2	1
	2ª »	9.5	5	18.0	1
	3ª »	10.4	5	19.4	1
Maggio	1ª »	11.8	5	21.0	1
	2ª »	12.3	4-5	22.6	1
	3ª »	14.2	4-5	24.5	1
Giugno	1ª »	15.8	4-5	25.9	1
	2ª »	16.1	4	26.1	1
	3ª »	16.9	5	27.6	1
Luglio	1ª »	18.4	4	29.5	1
	2ª »	19.2	5	30.5	1
	3ª »	19.2	5	30.7	1
Agosto	1ª »	19.1	5	30.3	1
	2ª »	18.8	5	30.1	1
	3ª »	18.3	5	29.0	1
Settembre	1ª »	17.7	5	27.9	1
	2ª »	16.2	5	25.9	1
	3ª »	15.4	5	24.1	1
Ottobre	1ª »	14.0	5-6	22.5	1
	2ª »	12.2	5 6	20.3	2
	3ª »	11.1	5-6	18.6	2
Novembre	1ª »	8.7	6	16.5	2
	2ª »	7.9	6	14.9	2
	3ª »	6.9	6	14 0	2
Dicembre	1ª »	5.8	6	12.0	2
	2ª »	5.0	6	11.6	2
	3ª »	4.6	6	11.0	2

Da queste tavole si può avere un' idea sull' andamento della temperatura nel suolo. I valori però che di qui si ricavano non possono essere che approssimati. In Roma e nell' Italia intera non vennero ancora eseguite osservazioni dirette su questo riguardo.

Fisica terrestre. — *I terremoti nel corso inferiore del fiume Velino* (*Umbria-Abruzzi*). Nota del dott. G. AGAMENNONE, presentata dal Socio TACCHINI.

Come suole accadere in simili occasioni, il parossisma sismico svoltosi nel giugno scorso a Rieti (Perugia) ed a Cittaducale (Aquila) ha richiamato l'attenzione sulla sismicità della regione in parola, cioè sulla frequenza e sull'intensità dei fenomeni sismici ivi avvenuti nel passato, siano essi *entocentrici*, cioè di carattere locale, o *esocentrici* cioè ripercussione di terremoti originatisi in altre regioni più o meno lontane. Ecco la lista dei terremoti, a cominciare dalla più remota antichità, ne' quali si faccia menzione esplicita delle due anzidette città, facendo notare che dove non si trovi citata altra fonte, le notizie s' intendono tratte dal catalogo del Mercalli, se non il più completo, almeno il più esteso che fin ad oggi si conosca per l'Italia; ed inoltre che siamo ben lontani dal pretendere che la nostra lista sia completa:

80-79 av. Cr., terremoto a Rieti (1).

76., la città di Rieti è danneggiata da violento terremoto (2). È probabile che si tratti dello stesso terremoto precedente.

1298 dopo Cr. Nov. 30, a Rieti, Spoleto, Pistoia molte scosse disastrose per più giorni (3). Ma il fatto stesso che si citano varie località danneggiate, non rende impossibile che si tratti per Rieti d'un terremoto esocentrico.

1302. Nell'anno, terremoto a Rieti.

(1) Anche per l'anno 178 o 177 av. Cr. viene ricordato un terremoto, avvenuto nel paese de' Sabini.

(2) Dalle *Memorie Reatine, dal 1198 al 1550*, credo finora inedite, del dott. Michele Michaeli.

(3) Anche di questo terremoto si fa cenno dal dott. M. Michaeli. In occasione poi della recente catastrofe di Rieti, i giornali politici hanno riprodotto un documento storico riguardante appunto il terremoto del 1298 e che trovo interessante di trascrivere qui appresso: « Era venuto in Rieti con la sua Corte papa Bonifacio VIII, ed il 20 novembre, « mentre egli, i cardinali e grandissima moltitudine di gente erano nella cattedrale, si ebbe « lo spavento di un violentissimo terremoto. La chiesa parve dovesse crollare. Tutti fug- « girono atterriti, fuggì lo stesso Bonifacio in abito pontificale ed andò ad alloggiare fuori « della città, nel prato adiacente al chiostro dei frati Predicatori. Nei giorni seguenti si « ripeterono le scosse, si aprirono le pareti degli edifizî cadendo in più luoghi e diroc- « candosi le torri. Perirono fra le rovine innumerevoli cittadini. Anche i castelli del con- « tado furono miseramente danneggiati e quello di Poggio Bustone fu rovinato dalle fon- « damenta colla morte di 150 abitanti. E giorno e notte, usciti dalla città e dai castelli « gli abitanti andarono errando per l'aperta campagna, e cadevano, dice il biografo del papa, uomini e giumenti, tremando spessissimo e fortemente la terra ».

1502. Terremoto rovinoso a Cittaducale che ne fu travagliata per 40 giorni (1).

1582. Violente scosse a Cittaducale (2).

1649. Nell' anno, un altro terremoto a Rieti.

1703. Il 14 genn., prima delle 2^h italiane di notte, un forte terremoto scosse l' Italia centrale, specie l' Appennino umbro ed abruzzese, e si sentì fino a Napoli ed a Venezia (3).

Il 2 feb. replicò con violenza ancor maggiore verso le $18^h\,1/_4$ ital. Ne patirono molto Spoleto, Camerino, Narni, Terni, Loreto, Chieti ecc. e specialmente i dintorni di Leonessa, Civitaducale, Aquila, Cascia e sopratutto Norcia che venne quasi interamente distrutta e pare si trovasse presso all' epicentro. Non s' ebbero gravi danni a Roma, ma si aprì la Cupola vaticana ed il mare si ritirò dalla spiaggia alla foce del Tevere. Si dice che si avessero allora 15000 vittime.

Il 3 feb., a $20^h\,3/_4$ ital., s'ebbe una replica fortissima a Roma, per la quale rovinarono tre archi del Colosseo e le scosse si ripeterono frequenti fino al 25, specie ad Aquila, ove se ne contarono 160 e furono risentite ne' dintorni di Gubbio, Spoleto, Perugia e S. Marino.

Il 15 feb., a 7^h ital. della notte, altra scossa, la quale molto più che a Norcia, Cascia ed Aquila fu intensa a Rieti, ove furono sentite repliche frequenti per quattro giorni con danno e rovina degli edifici (4).

Il 25 feb. si sentirono in Roma molte scosse, anche fortissime, e così pure nell' alta Umbria.

Per le scosse del 18 al 27 marzo perirono ancora 5000 persone, di cui 2400 nella sola Aquila.

Il Papa esonerò per 5 anni dalle pubbliche imposte le città più danneggiate (5).

(1) M. Baratta, *Il terremoto Sabino-Abruzzese del 28 giugno 1898*. Boll. della Soc. Geogr. Ital. Vol. XI, agosto 1898, p. 433.

(2) M. Baratta, op. cit.

(3) Nelle *Notizie storiche* del prof. Corradi riportate nella Memoria del prof. T. Taramelli: *Dei terremoti di Spoleto nell' anno 1895* (R. Acc. dei Lincei, 1896) si trova che questo terremoto, rinnovatosi per più giorni, subbissò Norcia e si propagò a tutto il territorio di Spoleto, e con maggior danno, a Rieti, Chieti, Monteleone ed altre terre e borghi dell' Abruzzo, a Civitaducale e in altri luoghi, e sino a Roma, che ne fu presa da indicibile spavento.

(4) M. Baratta, op. cit.

(5) Parecchi anni or sono, feci alcune ricerche, a scopo sismico, nell' Archivio comunale di Rieti. Dagli Atti del Consiglio (*Rif.* p. 141-143) alla data del 4 feb. 1703 si rileva che la seduta non si tenne nella solita sala del Palazzo municipale, perchè minacciante rovina a causa del terremoto, e si legge: « .... dovendo riconoscere questa città « la sua preservazione dalle rovine de' terremoti per intercessione de' suoi B. Avvocati si « propone che si risolva in che modo si possa dare qualche segno speciale di gratitudine « e di venerazione verso di questi suoi B. Tutelari », e poi: « Trovar qualche modo pronto

1719. Giu. 29. Mediocre scossa a Roma e forte a Norcia, Chieti, Spoleto e Foligno. — « Dopo le $10^h \frac{1}{2}$ di martedì mattina fu qui (Roma) sen-« tita una piccola scossa di terremoto che durò per lo spazio di una *Ave Maria,* « e si è poi inteso che fu più gagliardemente fatta sentire a Rieti, Spoletti, « Foligno, ed altri luoghi circonvicini e che in Norcia e suo contado abbia fatto « cadere alcune case con morte di molti » (1).

1776. Mar. 29. Sopravvenne una gagliarda scossa di terremoto sentita in tutta la provincia e territorio di Rieti, e persino nell' Abruzzo, con aver cagionato in alcuni luoghi delle rovine di case e fabbriche senza però alcuna mortalità (2).

1785. Ott. 2. Alle 10^h p., terremoto a Roma e più a Tivoli, Frascati, Marino, Castel Gandolfo, Terni, Spoleto, Rieti ecc. Così il Mercalli. Dall' ab. F. L. Gilii (3) si sa che l' epicentro di questa commozione fu Piediluco (20 km. nord-nord-ovest Rieti) dove caddero molte case. Lo scuotimento fu molto forte a Rieti (4) e si propagò fino a Norcia al nord ed a Roma al sud.

« per soddisfare gli operai e pagar le tavole ed altra robba servita per le baracche del « rev. Gonfaloniere (?) e de' suoi (?), giacchè i loro appartamenti nel palazzo Apostolico (?) « si sono resi inabitabili, sin tanto che dalla Sacra Congregazione si ordini precisamente « quali danari si debbano impiegare per dette spese e per il risarcimento del Palazzo e « Collegio pubblico ...... » e più sotto : « Che per riconoscere per intercessione dei nostri « SS. Avvocati la grazia della preservazione dalle rovine de' Terremoti, *principiati li 14 di « gen. passato circa le due ore di notte, i quali ancora seguitano*, che abbiamo per ora « ricevuta, e che speriamo di ricevere per l' avvenire, sono di parere ecc. ». La seduta consiliare del 15 feb. si tenne nella piazza del Leone per sfuggire i pericoli del terremoto. Il Baratta riferisce che nel periodo sismico del 1703, Rieti ebbe a soffrire molti danni. Lugnano, S. Rufina, Castel S. Angelo e luoghi adiacenti sperimentarono essi pure la violenza della concussione tellurica; Lugnano fu totalmente distrutto con 40 vittime, Castel S. Angelo alquanto danneggiato con qualche morto ed in Cittaducale caddero in tale occasione 4 case e molte altre rimasero lesionate o rese inabitabili.

(1) Dai *Documenti raccolti dal defunto conte A. Malvasia* ecc. pubblicati dal prof. M. S. De Rossi nelle Mem. della P. Acc. de' Nuovi Lincei, vol. V.

(2) Ibidem. — Il Baratta pone erroneamente questa scossa al 29 Apr.

(3) *Dissertazione fisico-storica su' i terremoti di Piediluco accaduti nell' ottobre del 1785, divisa in due parti* ecc. In Roma, 1786. — Altre notizie sono pure riportate dal dott. M. Baratta: *I terremoti umbri del 1785* (Riv. geogr. ital., anno III, p. 288, Roma, 1896), dove si dice che le due maggiori scosse (2 e 9 ott.) non causarono che del panico ad Aquila, ma danneggiarono il Palazzo Pubblico di Cittaducale.

(4) Ciò si rileva dalla seguente lettera del P. Quadrini, sacerdote e confessore dell' ordine di S. Gio. di Dio a Rieti, riportata appunto dal Gilii : « Rieti, 8 ottobre 1785. Qui « domenica a notte 2. del corrente sulle ore tre, e tre quarti vi fu un' oribilissima scossa « di terremoto, che replicò indi a poche ore altre tre volte ; dipoi replicò il Lunedì più « volte leggermente, e la sera alle ore quattro, e mezza si risentì colla stessa forza, ma fu di « pochissima durata. Oggi poi mercè l' intercessione de' Santi tutelari di questa Città, e « le orazioni, che si fanno, è cessato. La prima scossa durò più di due minuti, e se fosse « durata altrettanto ; Rieti ora sarebbe un mucchio di sassi. Il campanello della mia stanza, « che va dalle donne inferme, il quale è retto da una molla, suonava da se, come ancora

Nella notte 2-3 e nel giorno 3, scosse pressochè continue a Piediluco, le più forti delle quali saranno state quelle sentite a Rieti, a cui si accenna nella lettera del P. Quadrini. Circa le 6^h ital. della notte 3-4 e di quella 4-5 s'ebbero due forti scosse, per le quali rimasero screpolate quasi tutte le case di Piediluco. Nei giorni 5, 6 e 7 non mancarono altre scosse, ma lievi e brevi.

Ott. 9. Alle 4^h ant. alcune scosse nord-est sud-ovest rovinose a Roma, sentite a Norcia. Alle $4^h \frac{1}{2}$ altra mediocre a Roma. Questa notizia del Mercalli, è evidentemente in relazione con un'altra scossa suss. riportata dal Gilii per Piediluco, avvenuta alle 10^h ital. della notte 8-9, e molto più formidabile delle precedenti, tanto che completò la distruzione del paese. Fu disastrosa anche per Labro ed altri luoghi più prossimi a Piediluco, e sensibilissima a Rieti, dove non vi fu fabbrica che non ne avesse risentito danno. Arrecò non pochi danni anche a Terni e fu pure avvertita a Roma ed a Norcia, dove sembrò più sensibile di quella del 2 ottobre.

Non mancarono le repliche sia nello stesso giorno 9 sia nei successivi, e se ne sentivano ancora nel marzo 1786.

Il Moroni, parlando de' terremoti romani del 1785, dice che Pio VI elargì considerevoli soccorsi a Gubbio, Terni, Narni, Spoleto e Sabina pei danni sofferti dal terremoto.

1786. Feb. 12. Alle $5^h \frac{1}{2}$ terremoto a Rieti e nel giorno uno fortissimo a Terni.

Lug. 30. Alle 4^h pom. terremoto a Roma, Napoli, in Calabria, e specie a Rieti ed Aquila, dove fu fortissimo.

Tenuto conto che in quest'anno s'ebbero numerose e fortissime scosse a Terni, Roma ed Aquila, non è improbabile che il medesimo sia stato esocentrico per Rieti.

Fine del secolo XVIII. Il 30 di luglio, alle $18^h \frac{1}{2}$ circa, in Rieti fu sentito il tremuoto di sola ondulazione. Il 16 d'agosto fu sentita altra piccola scossa ad $1^h \frac{1}{2}$ di notte con gran rombo. Il successivo 17, fu avvertita altra piccola scossa senza rombo alle 16^h (1).

« da se suonavano le campane degli orologi. Il calcinaccio caduto nella mia camera fu « molto; e nella nostra gran Chiesa rovesciò sulla mensa dell'altare di s. Gio. di Dio « tutte tre le carte glorie. Ieri sera poi circa mezz'ora di notte vi fu un'orribile tem- « porale e caddero quattro fulmini vicino al nostro convento, i quali non recarono alcun « danno ».

(1) Queste notizie sono scritte in un foglietto volante, intestato *Pro Memoria*, da me trovato entro il registro della Specola Caetani tra le osservazioni meteorologiche dell'agosto 1790. Vedi la mia Nota: *Sopra un antico sismometro a mercurio ideato dell' ab. A. Cavalli* (Boll. della Soc. Sism. Ital., vol. III, 1897, p. 29). Peccato che sul foglietto non fosse segnato l'anno! È a credere tuttavia che dette tre scosse siano avvenute sullo scorcio del secolo passato.

1821. Mar. 22, una scossa rovinosa a Rieti (1).

1842. Nov. 25, tre forti scosse nell' Abruzzo ulteriore. Stando al catalogo del Baratta, furono sentite, senza danno, a Cittaducale ed in tutta la valle del Cicolano; le prime due suss., la terza ond., ciascuna di 2-3^s.

1854. Feb. 12. Alle 3^h ant. una forte scossa a Cittaducale.

È probabile che l' ora riportata dal Mercalli sia errata, e che si tratti del contraccolpo d' una scossa disastrosa avvenuta nell' alta Umbria verso le 6^h che rovinò Bastia. Tale supposizione è tanto più fondata che nel catalogo del Baratta si dice che la scossa, ond. e senza dannî, ebbe luogo a Cittaducale alle 5^h.

1856. Mar. 10. Alle 5^h pom., una forte scossa di 6^s a Cittaducale. Il Baratta, nel suo catalogo, la dice violenta e senza danni.

1859. Ag. 22. Scossa a Cittaducale e ad Aquila. Si tratta probabilmente della ripercussione nel bacino del Velino d' una scossa disastrosa avvenuta a Norcia nel pomeriggio dello stesso giorno e descritta in modo particolareggiato dal P. Secchi, il quale dice che il movimento fu forte e sensibile fino a grandi distanze e cioè fino a Roma ed a Pesaro.

1873. Mar. 12. Verso le 9^h pom. una sensibilissima e lunga scossa a Rieti, avvertita anche dall' autore, in occasione d' un violento terremoto ad Urbino, il quale, dai dati raccolti dal P. Serpieri, risulta essersi propagato più o meno lievemente in tutta Italia (2).

1878. Sett. 15. Verso le 8^h $^1/_4$, scossa disastrosa nello Spoletino, la quale insieme a parecchie repliche, anche del giorno 16, furono sentite in Rieti (3).

1881. Fra il pomeriggio dell' 11 ed il mattino del 12 marzo, circa 19 scosse spaventarono le popolazioni di Foligno, Terni e Rieti (4). Il De Rossi,

(1) È confermata nella *Gazzetta universale di Foligno* del 3 apr., dove si dice che la scossa recò gravi danni a Rieti e nel medesimo tempo videsi uscire dal fiume Canera una colonna di fuoco (?) la quale, passando sopra la città, andò a gettarsi nel lago di Cantalice. Questa notizia è riportata dal dott. M. Baratta, *Materiali per un catalogo dei fenomeni sismici avvenuti in Italia* (1800-1872), Mem. della Soc. Geogr. It., vol. VII, parte 1^a, 1897, p. 81; ma per equivoco è da lui riferita al 22 maggio. — Si trova pure, con lievi varianti, nel De Rossi, *Documenti raccolti dal defunto conte Malvasia* ecc.

(2) Un altro consimile terremoto si fe' sentire in quasi tutta l'Italia la notte 17-18 mar. 1875 e non avrà mancato di propagarsi anche nel bacino del Velino.

(3) Nel *Bull. del Vulc. It.* del prof. De Rossi, troviamo i seguenti particolari: Rieti. Sett. 15, 8^h 20^m ant., scossa med. suss. ad intervalli per 2^s, ond. est-ovest per 3^s sensibilmente crescente, poi fremiti e rombo, poi leggera ond. 1^s. Più tardi altre leggere scosse. — 2^h pom., sensibile ond. nord-sud, poi est-ovest, di nuovo nord-sud, in fine est-ovest, in tutto durata 3-4^s. — Sett. 16, 1^h leggera. — 2^h ant. mediocre e breve. — Fra le 3^h e 3^h $^1/_4$ leggiere.

(4) Eccone i particolari, tirati dal De Rossi: 11 mar. 3^h 22^m pom., lieve ond. nord-ovest a Rieti; 5^h pom., sensibile ond. nord-ovest di 2-3^s; 8^h 40^m pom., leggerissima; 9^h 23^m pom., leggera; 11^h 50^m pom., forte. Tra 6^h pom. e mezzanotte, tre sensibili a Cittaducale. — Nella notte 11-12 quattro scosse in due ore a Rieti. — 12 mar. 3^h ant., forte nord-ovest; 3^h 55^m ant., mediocre nord-ovest; 3^h 12^m pom., lieve nord.ovest.

dice mancare numerose notizie sulle quali potere istituire una buona analisi. È tuttavia a credere ch' esse abbiano avuto l' epicentro fra Trevi e Montefalco.

Ag. 14. Alle $3^h \frac{1}{2}$ ant., forte scossa a Cittaducale. — Nov. 18, $6^h \, ^3/_4$ pom., forte ond. — Nov. 19, 7^h ant., leggera ond. ivi (De Rossi).

1885. Apr. 10. Alle $2^h 42^m$ ant., scossa forte (grado VI) ovest-est di 4^s a Rieti (stando al De Rossi).

È il contracolpo d' un rovinoso terremoto ad Avezzano ed Anticoli.

Giu. 17. Alle $11^h \frac{1}{2}$ pom., scossa rovinosa a Morro Reatino e Rivodutri (grado VIII), del VII a Terni, VI a Leonessa ed a Rieti, V a Narni, IV-V a Spoleto, II a Perugia, I ad Aquila (De Rossi).

1888. Sett. 16. Alle $6^h 40^m$, scossa breve ma piuttosto forte a Rieti, che sembra sia stata avvertita da parecchi anche a Sangemini, ma non a Cesi, Terni e Poggio S. Lorenzo in Sabina (1).

Fin qui sono stati ricordati quei terremoti che furono sentiti con certezza a Rieti ed a Cittaducale e la maggior parte de' quali, come abbiam visto, furono esocentrici per queste due città. Chi sa dire poi le innumerevoli volte in cui le stesse saranno state più o meno sensibilmente scosse sia per terremoti entocentrici e ancor più frequentemente per quelli esocentrici, quali eco più o meno lontano di violente commozioni avvenute nei numerosi focolari sismici di cui è sì ricca l' Italia, e più facilmente in quelli ancor più vicini dell' alta Umbria, dell' Aquilano, della Sabina e del Lazio? Assai spesso nel catalogo del Mercalli si parla di terremoti variamente intensi, coll' epicentro in queste provincie, e talora se ne citano altri, perfino disastrosi, avvenuti in località vicinissime, quali Terni, Posta, Amatrice, Leonessa ecc., e che senza dubbio saranno stati avvertiti anche a Rieti ed a Cittaducale. Se si volesse tener conto di tutti i terremoti esocentrici che con maggiore o minore probabilità hanno potuto farsi sentire nel bacino del Velino, essi si conterebbero a migliaia e non è perciò il caso di darne qui una lista, sia pure riassuntiva.

Da quello che precede risulta però all'evidenza quanto siano scarse e deficienti le notizie che si posseggono attualmente intorno alla regione che forma l' oggetto del nostro esame, e come sia impossibile basarsi sopra le medesime per dilucidare l' importante questione circa la sismicità di detta regione, sopratutto dal punto di vista della frequenza ed intensità dei terremoti entocentrici. Da qui si vede, per ogni città e borgata, l' utilità della ricerca delle notizie concernenti gli antichi terremoti, i quali potrebbero un giorno essere abbastanza studiati ed identificati, in base ai numerosi dati raccolti per ogni contrada che fu sede de' fenomeni sismici. Ed a tale riguardo è nuovamente

(1) Notizia inedita dell'Archivio sismico dell' Uff. Centr. di Met. e Geodinamica di Roma.

a deplorare che per mancanza di fondi non siano state fino ad oggi accolte dai Ministeri dell'Agricoltura, dell' Interno e delle Finanze, le proposte avanzate dal Direttore dell' Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica per la ricerca delle notizie degli antichi terremoti di tutta l' Italia ([1]).

Ma se disgraziatamente per il passato è assai difficile il poter ricostituire i fenomeni sismici che qua e là hanno senza tregua travagliato l' Italia, ciò è divenuto relativamente facile a partire dal 1889, quando per iniziativa del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica in Roma, si è cominciato a raccogliere sistematicamente e con la maggior cura possibile le notizie sismiche provenienti da tutte le parti d' Italia, ed inoltre a pubblicarle regolarmente dopo averle vagliate e completate. È così che possiamo oggi disporre d' un decennio di buone osservazioni, dalle quali quasi sempre ci è dato poter riconoscere, per ogni località colpita, se il terremoto fu ivi entocentrico od esocentrico; dappoichè una volta noti i limiti di propagazione d' ogni commozione sismica e la forza colla quale la stessa fu sentita ne' varî luoghi, è sempre possibile farsi un' idea più o meno precisa della posizione dell' epicentro.

Venendo ora alla regione che forma l' oggetto del nostro esame, troviamo appunto per il decennio 1889-1898 una quindicina di terremoti in essa sentiti, senza contare nel numero le scosse precursori e le repliche che fan quasi sempre corteggio ad ogni terremoto un po' forte. Tra essi, 4 sono prettamente entocentrici e cioè quelli del 20 giugno 1891, 8 feb., 23 apr. e 28 giu. 1898. Quello poi delle 2^h ant. del 2 agosto 1893 e che si sentì più o meno fortemente, ma senza danni sensibili, nelle città e villaggi situati all' intorno del M. Terminillo, può forse esser dovuto alla medesima causa. Gli altri 10 sono così ripartiti: 1 proveniente dall'Aquilano, 3 dallo Spoletino, 1 dal Fulignano, 1 dal Lazio, 2 dalle Marche, 1 dalle Puglie e perfino 1 da fuori d'Italia ([2]). In conseguenza, i $^2/_3$ dei terremoti, sentiti nel corso inferiore del Velino in questi ultimi 10 anni, sarebbero stati esocentrici e fortunatamente nessuno tra essi fu apportatore di danni. Ma, ahimè, l' esperienza del passato ci ha dimostrato, come s' è visto nel principio di questa Nota, che non sempre i medesimi sono innocui e che perciò sono da temersi, per loro parte, anche disastri per niente inferiori a quelli causati da terremoti entocentrici. Adunque è sempre il caso di dire: *caveant consules*; e non è mai di troppo il raccomandare alle località danneggiate che i restauri debbano essere soli-

([1]) Io prendo qui l' occasione per incoraggiare a tale impresa, per ciò che concerne la capitale sabina, anche i miei concittadini reatini, i quali disponendo d' un importante archivio comunale e d' una biblioteca abbastanza ricca, sono in grado di far opera utile tanto per la storia della loro città, quanto per il progresso della scienza.

([2]) Non sono troppo rari neppure i terremoti di questa categoria, la maggior parte de' quali vengono dalla Grecia, come quello del 27 agosto 1886 che si estese a quasi tutta l' Italia.

damente fatti e che nella costruzione de' nuovi edifizî si abbia sempre presente la poca stabilità del suolo in occasione di fenomeni sismici.

Il fatto stesso poi che i terremoti esocentrici possono scatenarsi sulla regione, di cui ci andiamo occupando, da direzioni così diverse, rende di niun valore la pratica da alcuni tanto raccomandata del doversi costruire gli edifizî secondo un conveniente orientamento, in modo che possano maggiormente resistere all'arrivo delle onde sismiche, supposte sempre venire da un' unica direzione per ogni località.

Chimica. — *Nuove ricerche sulla formazione del solfuro rosso di mercurio per via umida* [1]. Nota di U. Alvisi, presentata dal Socio E. Paternò.

Da molto tempo è noto che il solfuro rosso di mercurio si può anche preparare per via umida. Senza riferire la lunga letteratura riguardante tali ricerche mi limito solo ad accennare ai lavori più importanti del Brunner (P. A. 15-600), del Raab (N. Rep. Pharm. 24-39), del Fickentscher (Rep. 33-429), del Fleck (I. Pr. 99-247), del Koninck (Z. Anorg. Chem. 1891-51), dell' Hansamann (B. 1874-1746) etc., e sovratutto di A. Ditte (C. R. Vol. 98, p. 1271, 1380). Dall' esame di tutte le ricerche in proposito senza entrare nell' esame dettagliato delle reazioni, si può intanto trarre la conclusione generale: « Che la formazione del solfuro rosso di mercurio cristallizzato o « amorfo per via umida finora si è solo ottenuta quando o il mercurio o il « suo ossido o qualche suo sale si trovano a contatto, per un tempo più o « meno lungo e secondo le condizioni di temperatura, con iposolfiti o meglio « solfuri e polisolfuri alcalini; in altri termini in presenza dello zolfo in « combinazioni che abbiano relazione alcalina ».

Per contributo a queste ricerche assai numerose, io ho creduto opportuno di esaminare il comportamento delle combinazioni del mercurio o di qualche suo sale con i solfuri alchilici sia in presenza del solfuro ammonico, sia dell' idrogeno solforato.

Nelle identiche condizioni ho sospeso nel solfuro ammonico giallo, ordinario in uso per analisi qualitativa, le seguenti sostanze:

1° $Hg\,(C^2\,H^5\,S)^2$
2° $Hg\,Cl\,(C^2\,H^5\,S)$
3° $Hg\,Cl^2\,(C^2\,H^5)^2\,S$
4° $Hg\,Cl$

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica applicata ai materiali di costruzione, della R. Scuola degli Ingegneri di Roma.

Il 1° composto è diventato, agitando, immediatamente rosso; il 2° ha impiegato a diventar rosso un tempo un po' maggiore del 1° diventando prima nero; il 3° e il 4° hanno, in ispecie il 4°, tardato molto di più, passando prima per una fase intermedia in cui erano neri e sempre cristallini. Difficilmente si può apprezzare la composizione dei composti neri di passaggio: il composto rosso definitivo non contiene altro che zolfo e mercurio; durante la reazione, che si fa a freddo, si separa il solfuro di etile.

Dopo questo primo saggio sono passato all' esame dell' azione dell' idrogeno solforato sulla mercaptide mercurica, la quale venne preparata trattando il solfidrato di etile con ossido mercurico e purificando il prodotto per cristallizzazione dall' alcole. Si ottenne così in belle scaglie cristalline che fondevano a 76°,2 (76°-77° Otto. B-13-1290 e B. 15-125).

Si sospese l' etilmercaptide nell' acqua e, mantenendo il miscuglio ad 80° o meglio al bollore, si fece passare una corrente di idrogeno solforato. La etilmercaptide fuse e sotto l' azione del gas solfidrico assunse prima una tinta rossastra, poi nera, poi definitivamente rossastra. Durante la reazione si svolse abbondantemente solfidrato di etile, che venne raccolto e identificato, dopo averlo purificato per distillazione. La sostanza giallo-rossastra venne trattata a caldo con acido cloridrico con che si raggrumò e diventò nettamente rossa; quindi si lavò ripetutamente con alcole bollente.

Il prodotto così ottenuto è di un bel rosso, è amorfo e non contiene altro che zolfo e mercurio. All' analisi quantitativa diede il seguente risultato:

Gr. 0,4226 di sostanza si disciolsero in acqua regia, si scacciò l' eccesso d' acido e si precipitò il mercurio con corrente di idrogeno solforato. Il precipitato, raccolto su filtro a pompa in un crogiolo di Gook previamente pesato, dopo prosciugamento da 90° a 100° fino a perdita costante di peso, pesava gr. 0,4221. In altri termini il prodotto rosso non era altro che solfuro di mercurio HgS.

I prodotti intermedî della reazione su accennati sono assai difficilmente determinabili essendo de' miscugli, probabilmente di solfuro mercurico con la mercaptide.

Gli stessi risultati si ottengono facendo gorgogliare l' idrogeno solforato in una soluzione alcoolica calda di mercaptide, poi acidificando quando la tinta del precipitato è diventata definitivamente giallo-rossastra.

Più importante è ancora notare come, benchè con minor facilità, si ottengano gli stessi risultati *acidificando* fin da principio o il miscuglio di mercaptide e acqua o la soluzione di mercaptide nell' alcole con poco acido cloridrico, ma in modo che essa sia nettamente acida,

ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, si procedette alle elezioni di Soci e Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Furono eletti Soci nazionali:

Nella Categoria II, per la *Fisica*: RIGHI AUGUSTO, RÒITI ANTONIO e PACINOTTI ANTONIO.

Nella Categoria III, per la *Geologia e Paleontologia:* SCARABELLI GOMMI FLAMINI GIUSEPPE.

Nella Categoria IV, per la *Zoologia:* EMERY CARLO.

Fu eletto Corrispondente:

Nella Categoria I, per la *Meccanica*: SOMIGLIANA CARLO.

Furono inoltre eletti Soci stranieri:

Nella Categoria I, per la *Meccanica*: GREENHILL GIORGIO e VOIGT VOLDEMARO.

Nella Categoria II, per la *Fisica*: RÖNTGEN GUGLIELMO CORRADO.

Nella Categoria III, per la *Geologia* e *Paleontologia:* KARPINSKY ALESSANDRO e GEIKIE ARCHIBALD.

Nella Categoria IV, per la *Zoologia:* LANKESTER EDWIN RAY.

L' esito delle votazioni fu proclamato dal Presidente con circolare del 20 luglio 1898; e le elezioni dei Soci nazionali e stranieri furono sottoposte all' approvazione di S. M. il Re.

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La R. Società delle scienze di Upsala; la R. Accademia di scienze e lettere di Copenaghen; l'Accademia di scienze e lettere di Montpellier; la Società Reale di Londra; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società geologica di Sydney; la Società di scienze naturali di Emden; il Museo di zoologia comparata di Cambridge; il R. Osservatorio di Praga; il R. Orto botanico di Kew.

Annunciarono l' invio delle proprie pubblicazioni:

La Società italiana delle scienze (detta dei XL), di Roma; la Società di scienze fisiche e naturali di Bordeaux; la Società geologica di Ottawa;

l'Istituto Smithsoniano di Washington; la Facoltà delle scienze di Marsiglia; l'Istituto Teyler di Harlem; l'Università di Utrecht; la R. Scuola politecnica di Dresda; la Scuola politecnica di Parigi; il R. Orto botanico di Kew; l'Osservatorio di Pietroburgo.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
dal 4 luglio al 7 agosto 1898.

Alessi C. — Appunti sui tunicati. Descrizione e sistematica. Avola, 1898. 4°.

Arcangeli G. — Sugli avvelenamenti causati dai funghi e sui mezzi più efficaci per prevenirli. Firenze, 1898. 8°.

Berlese A. — Fenomeni che accompagnano la fecondazione in taluni insetti. Mem. I. II. Firenze, 1898. 8°.

Brandes W. — Flora der Provinz Hannover. Hannover, 1897. 8°.

Carnot A. — Traité d'Analyse des substances minerales. T. I. Méthodes générales d'analyse qualitative et quantitative. Paris, 1898. 8°.

Catalogo della mostra fatta dal Corpo reale delle Miniere all' Esposizione generale italiana del 1898 in Torino, ecc. Roma, 1898. 8°.

Catalogo generale della Biblioteca degli Ingegneri ed Architetti in Torino. Suppl. N. 1. Torino, 1898. 8°.

Catalogus der Land- en Zeekaarten toebehoorende aan het K. Institut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde etc. 'S Grevenhage, 1898. 8°.

Cavara F. — Brevi osservazioni alla critica mossa al mio lavoro « Intorno ad alcune strutture nucleari » ecc. Firenze, 1898. 4°.

Id. — Contributo alla conoscenza delle *Podaxineae*. Genova, 1898. 4°.

Id. — Intorno ad alcune strutture nucleari. Pavia. S. a. 4°.

Id. — Malattie crittogamiche dei pesci. S. l. 1898. 8°.

Id. — Ueber eine neue Pilzkrankheit der Weisstanne *Cucurbitaria pithyophila* (Kunze) De N. Stuttgart. S. a. 8°.

Cockerell T. D. A. — Directions for Collecting and preserving Scale Insects (*Coccidae*). Washington, 1897. 8°.

Crepas E. — Sul Congresso promosso da Mathesis. Milano, 1898. 8°.

De Angelis d' Ossat G. — Contribuzione alla paletnologia romana. S. l. e a. 8°.

Katalog der Bibliothek der K. Leop.-Carol. d. Akademie der Naturforscher. Halle, 1897. 8°.

Katalog der Reptilien-Sammlung im Museum der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft in Frankfurt a. M. II Th. (Schlangen). Frankfurt a M., 1898. 8°.

Katalog der systematischen Vogelsammlung der Provinzial-Museums in Hannover. Hannover, 1897. 8°.

Katalog der Vogelsammlung aus der Provinz Hannover. Hannover, 1897. 8°.

Keller F. — Ulteriori ricerche sulla intensità orizzontale del magnetismo terrestre nei pressi di Roma. Roma, 1898. 8°.

Mosso U. — Revue des travaux de pharmacologie, de toxicologie et de thérapeutique publiés en Italie durant l'année 1897. Turin, 1898. 8°.

Motta Coco A. — Contributo sulla produzione dei globuli rossi nel sangue circolante embrionale. Milano, 1898. 8°.

Museo (R.) industriale italiano in Torino e Memorie e Note del Corpo insegnante pubblicate in occasione della Esposizione generale italiana 1898 in Torino. Torino, 1898. 8°.

Noether M. — Francesco Brioschi. Leipzig, 1898. 8°.

Olivella D. — Mathematicae minima. Cosenza, 1898. 8°.

Pickering W. H. — The meteoric Shower of Nov. 13. 1897. Cambridge, 1898. 4°.

Pinto L. — Sulla teoria dei riflettori. Napoli, 1898. 4°.

Recueil de données numériques publiés par la Société française de Physique — *Dufet H.* Optique 1er fasc. Longueurs d'onde. Indices des gaz et des liquides. Paris, 1898. 8°.

Scarabelli Gommi Flamini G. — Nuovi studi sulla probabilità di felice risultato di una perforazione artesiana in Imola. Imola, 1898. 4°.

Scheiner J. — Untersuchungen ueber die Spectra der helleren Sterne etc. Potsdam, 1895. 8°.

Stossich M. — Filarie e Spiroptere. Trieste, 1897. 8°.

Id. — Note parassitologiche. Trieste, 1897. 8°.

Id. — Saggio di una fauna Elmintologica di Trieste e provincie contermini. Trieste, 1898. 8°.

Verzeichniss der im Provinzial- Museum zu Hannover vorhandenen Säugetiere. Hannover, 1897. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 21 agosto 1898

Fisica terrestre. — *Osservazioni meteorologiche orarie simultanee, in quattro stazioni da Catania alla cima dell' Etna.* Nota del Corrispondente A. Riccò e di G. Saya.

Avendo tre stazioni meteorologiche stabilite nell' Osservatorio di Catania, nella Cantoniera meteorico-alpina, nell' Osservatorio Etneo, e potendo facilmente organizzarne una in Nicolosi, potevamo disporre di quattro punti presso che in linea su tutto il pendio dell' Etna.

Avendo inoltre avuta la cortese adesione di varî colleghi di altri istituti scientifici di Catania, i quali si sobbarcarono volentieri ai disagi dell' impresa, abbiamo deciso di fare due serie di osservazioni meteorologiche orarie per due giorni di seguito, in estate ed in inverno.

L' impresa riuscì facilmente e pienamente in estate, anche per il bellissimo tempo incontrato. Si pensò di aggiungere allora, anche una quinta stazione presso il livello del mare, cioè al Mareografo, nel porto di Catania.

Spedizione estiva. — Vi presero parte:

Oss. Etneo (Alt. 2947^m): A. Riccò, direttore dell'Osservatorio; A. Galvagno, custode.

Cantoniera (Alt. 1886^m): Prof. A. Quadrio, R. Scuola Enologica; prof. A. Vivenza, id.

Nicolosi (Alt. 705^m): Prof. G. Saya, assistente all'Osservatorio; dott. Mendola, assistente al Gabinetto di Fisica.

Oss. di Catania (Alt. 65^m): Ing. A. Mascari, assistente all'Osservatorio; ing. S. Arcidiacono, id.; dott. E. Tringali, id.; A. Capra, meccanico.

Mareografo (Alt. 2^{m}): Prof. F. Tami, dell' Istituto Nautico; prof. G. Platania, id.

Spedizione invernale. — Non altrettanto facile riuscì la spedizione invernale, anche in causa delle occupazioni scolastiche della maggior parte degli osservatori, le quali loro impedivano di esser pronti ad ogni periodo di tempo propizio, che inoltre pur troppo si presentò di raro.

Per il primo dell' anno (onde approfittare delle relative vacanze) tutto era pronto, ma il tempo si guastò giusto alla vigilia; così con altri progetti e tentativi inutili di salita alla cima, si giunse verso la fine di marzo: essendo però ancora la metà superiore dell'altezza dell' Etna coperta di neve, e la stagione, non solo lassù, ma anche in Catania di carattere invernale. Essendo intanto allungata la giornata, diminuiva una delle difficoltà della viabilità sull' Etna: si decise di fare un tentativo risoluto; però noi due per non sprecare tempo e forze in prove inutili, rinunziammo a salire all' Osservatorio Etneo, dietro il fatto che ciò non era riuscito pochi giorni prima neppure al custode, accompagnato da due montanari robusti come lui; e così stabilimmo che lassù sarebbe andato il custode medesimo col suo aiutante e due portatori; noi saremmo rimasti l' uno alla Cantoniera e l' altro a Nicolosi.

Si partì da Catania il mattino del 27 marzo con tempo splendido; s' incontrarono le prime macchie di neve a Casa del Bosco (1435^{m}) e neve quasi continua al M. Faggi (1600^{m}); ma arrivati alla Cantoniera vi si trovò il Custode e gli altri che per il gran vento, e la neve frolla, avevano dovuto ritornare indietro dopo un certo tratto percorso verso l' Osservatorio Etneo.

Fortunatamente nella notte la neve gelò e divenne alquanto più resistente, ed il vento al far del giorno si calmò alquanto; cosicchè il custode e gli altri partirono per l' Osservatorio Etneo, e vi giunsero però solo verso mezzodì, a causa sempre della neve cattiva e del vento forte. Non avendo poi mezzo di comunicare fra le diverse stazioni, non fu possibile riorganizzare la spedizione; ad ogni modo si hanno 25 osservazioni orarie all'Osservatorio Etneo, e un numero maggiore nelle altre stazioni comprendenti completamente o quasi le dette ore d' osservazione all' Osservatorio Etneo; talchè l' impresa si può giudicare sufficientemente riuscita anche per l' inverno. Vi presero parte come osservatori:

Oss. Etneo: A. Galvagno, custode; S. Messina, aiutante.

Cantoniera: Prof. A. Riccò; dott. E. Tringali.

Nicolosi: Prof. G. Saya; A. Rubino, allievo meccanico.

Oss. Catania: Ing. A. Mascari; ing. S. Arcidiacono; dott. Mendola.

Al Mareografo non si potè organizzare una stazione per mancanza di personale.

Strumenti. — Gli strumenti adoperati nelle due spedizioni hanno le correzioni indicate nelle seguenti tabellette A e B. I psicrometri erano muniti di ventilatore, eccetto quello dell' Osservatorio Etneo, ove la grande agitazione

naturale dell'aria, rende inutile la ventilazione meccanica. I termometri sono stati campionati dall' Ufficio Centrale di Meteorologia in Roma, oppure furono da noi confrontati con un termometro campione, fornitoci dall' Ufficio medesimo. Dei barometri, tutti di sistema Fortin, quello dell' Osservatorio di Catania, quello dell'Osservatorio Etneo e quello della Cantoniera per la spedizione invernale, erano stati campionati all' Ufficio Centrale suddetto: gli altri furono da noi confrontati ai due primi od al terzo, prima e dopo le spedizioni. Nel barometro adoperato alla Cantoniera per la spedizione estiva, disgraziatamente entrò aria nel viaggio di andata, per cui la colonna di mercurio restò depressa di circa tre centimetri: nella discussione le osservazioni estive del barometro alla Cantoniera si sono considerate come non fatte.

Correzioni strumentali.

TAB. A. *Spedizione del 26-27-28 luglio 1897.*

STAZIONE	Barometro	Termometro attaccato	Psicrometro	
			Termometro asciutto	Termometro bagnato
Mare			— 0°,02	
Mareografo	mm — 0,22	— 0°,61	— 0,65	— 0,62
Osserv. di Catania	+ 0,63	— 0,35	— 0,40	— 0,50
Nicolosi	+ 0,02	— 0,09	+ 0,02	+ 0,07
Cantoniera	— 0,07	— 0,42	— 0,46	— 0,56
Osserv. Etneo. . .	+ 0,43	+ 0,30	— 0 30	— 0,10

TAB. B. *Spedizione del 27-28 marzo 1898.*

STAZIONE	Barometro	Termometro attaccato	Psicrometro	
			Termometro asciutto	Termometro bagnato
Osserv. di Catania	mm + 0,63	— 0°,35	— 0°,40	— 0°,50
Nicolosi	+ 0,02	— 0,09	— 0,65	— 0,62
Cantoniera	+ 0,19	0,00	— 0,46	— 0,64
Osserv. Etneo. . .	+ 0,43	+ 0,30	— 0,70	— 0,40

Le singole osservazioni orarie e le loro rappresentazioni grafiche saranno pubblicate *in extenso* altrove: qui riferiamo intanto solo quanto emerge dalla semplice ispezione delle rappresentazioni grafiche medesime.

Temperatura (luglio). — Le curve che la rappresentano nelle varie stazioni sono sensibilmente parallele, però in alto vi è anticipazione dei massimi e dei minimi, prolungamento del minimo, tendenza ad un rialzo, dopo la rapida discesa vespertina.

L' ampiezza delle oscillazioni è minore all' Osservatorio Etneo, pressochè eguale nelle altre stazioni inferiori.

La temperatura alla superficie del mare presenta un notevole parallelismo con quello dell'aria sovrastante, e piccole differenze nel valore.

Temperatura (marzo). — Nelle due stazioni superiori si ha andamento affatto irregolare e niente caratteristico, con oscillazioni ristrettissime.

Pressione (luglio). — Parallelismo generale delle linee: maggiore regolarità all'Osservatorio Etneo, con tendenza a massimi e minimi a 0^h, 6^h, 12^h, 18^h. In alto oscillazioni minori.

Pressione (marzo). — In alto andamento più regolare, con traccie di massimi e minimi a 0^h, 6^h, 12^h, 18^h, ed oscillazioni assai meno ampie.

Tensione del vapore acqueo (luglio). — Andamento concordante solo per il minimo nelle ultime ore della notte. In alto andamento più uniforme e regolare.

Tensione del vapore acqueo (marzo). — In alto grande regolarità e ristrettissime oscillazioni: in basso andamento irregolare.

Umidità relativa (luglio). — Nelle stazioni superiori vi è appena una traccia di parallelismo dell'andamento; il parallelismo è sempre più sensibile nelle stazioni inferiori, nelle quali però l'andamento è pure irregolare, capriccioso.

Umidità relativa (marzo). — Vi è un parallelismo più sensibile che in estate, specialmente nelle stazioni inferiori. All'Osservatorio Etneo l'umidità relativa è molto forte ed uniforme.

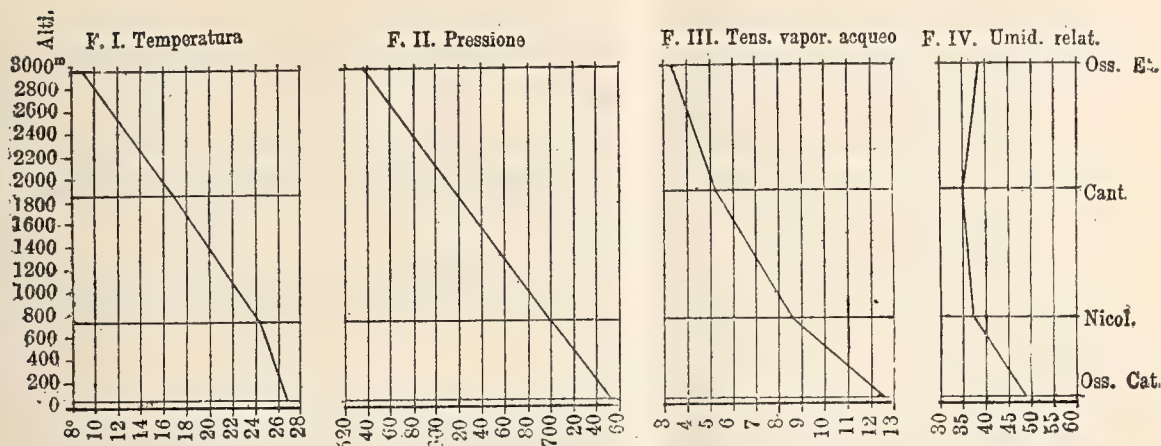
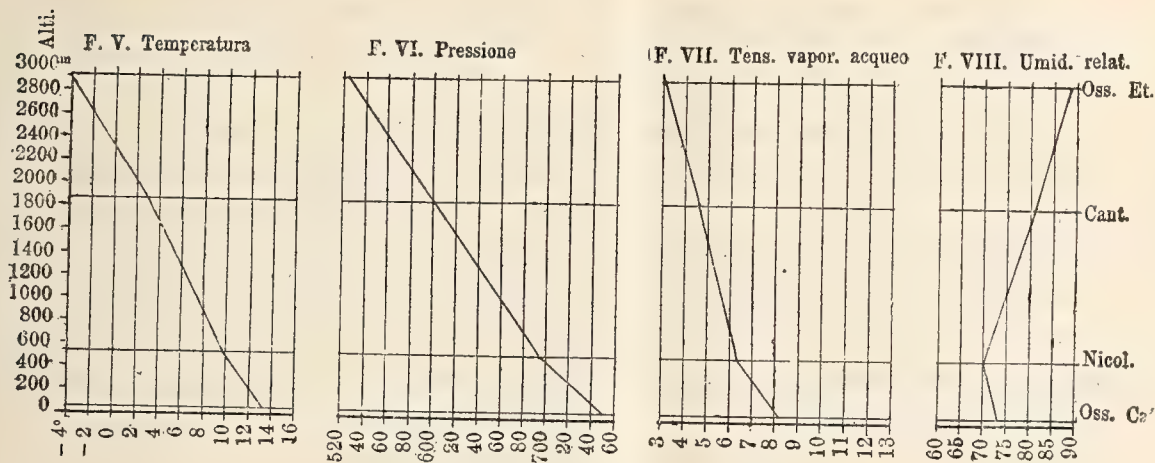
Variazione coll'altezza. — Per eliminare le irregolarità accidentali, e mettere in evidenza la variazione degli elementi meteorologici coll'altezza nelle diverse parti del giorno, si sono fatti per ciascuna stazione, e nelle due stagioni i seguenti aggruppamenti di valori osservati, e le relative medie:

Mattutino ..... $\frac{1}{5}\,(2^h + 3^h + 4^h + 5^h + 6^h)$
Antimeridiano .. $\frac{1}{5}\,(6 + 7 + 8 + 9 + 10)$
Meridiano ..... $\frac{1}{5}\,(10 + 11 + 12 + 13 + 14)$
Pomeridiano ... $\frac{1}{5}\,(14 + 15 + 16 + 17 + 18)$
Serotino .... $\frac{1}{5}\,(18 + 19 + 20 + 21 + 22)$
Notturno ...... $\frac{1}{5}\,(22 + 23 + 24 + 1 + 2)$.

Inoltre si sono fatte le medie di tutte le medie per ciascun elemento e ciascuna stagione. Tutte queste medie sono date nelle tabellette n. I a VIII. Avendo noi rappresentato graficamente i detti valori medî degli elementi meteorologici, in relazione alle 4 altitudini delle stazioni, si sono avuti per i gruppi delle varie parti del giorno in una data stagione andamenti simili: perciò qui si riproducono nelle figure I a VIII solo i diagrammi corrispondenti alle medie per la giornata. Per il detto prima, nelle osservazioni estive relative al barometro si considerano solo tre stazioni.

Nelle dette tabellette n. I a VIII è data anche la variazione dei singoli elementi meteorici per 100^m d'altezza fra le diverse stazioni. Per tutti

gli elementi poi non si è tenuto conto in questo studio delle osservazioni fatte nel porto al Mareografo, perchè questa stazione presenta poca differenza di altezza coll' Osservatorio di Catania, ed inoltre certamente ivi alcuni elementi meteorologici sono influenzati dall' immediata prossimità del mare.

LUGLIO

MARZO

Si vede nelle tabelle e nei grafici che il valore di tutti gli elementi, eccettuata l'umidità relativa, va diminuendo con l' altezza, ma in modo diverso per i diversi elementi, come indica la differente forma delle linee; si ha infatti:

Temperatura (luglio). — La diminuzione in rapporto alle differenze d' altezze è minore fra le due stazioni inferiori, che fra le tre superiori per le quali è pressochè eguale.

Temperatura (marzo). — La diminuzione è alquanto minore che in estate, ed è molto più uniforme.

Pressione (luglio). — La diminuzione in ragione dell' altezza è alquanto minore fra Nicolosi e l' Osservatorio Etneo, di quel che è fra Nicolosi e Catania.

Pressione (marzo). — La variazione della pressione è pressochè uniforme fra le 4 stazioni, leggermente decrescente coll' altezza.

Tensione del vapore acqueo (luglio). — La diminuzione per l'altezza va decrescendo sensibilmente con l' altezza.

Tensione del vapore acqueo (marzo). — Avviene lo stesso, ma in grado meno sensibile.

Umidità relativa (luglio). — Va diminuendo da Catania a Nicolosi, e da Nicolosi alla Cantoniera con minore rapidità: invece dalla Cantoniera all' Osservatorio Etneo va aumentando.

Umidità relativa (marzo). — Diminuisce appena da Catania a Nicolosi, aumenta invece notevolmente da Nicolosi alla Cantoniera e dalla Cantoniera all' Osservatorio Etneo, uniformemente.

Dunque la temperatura e la tensione del vapore acqueo hanno una variazione coll' altezza nell' inverno minore che nell' estate: ciò non ha luogo per la pressione e l' umidità relativa.

Si noterà poi che nel passaggio per il limite della neve, che come si disse era di poco inferiore alla Cantoniera, nessun elemento meteorico presenta una alterazione; infatti le linee invernali sono rette, cioè non fanno angolo sensibile in quel punto.

Aggiungeremo che riguardo al vento è da notarsi di caratteristico la grandissima prevalenza e la forza dei venti occidentali nelle stazioni alte, mentre ciò non ha luogo in Catania.

Nel finire ringraziamo gli egregi colleghi che ci hanno aiutato con tanto zelo e disinteresse; ed esprimiamo anche la nostra gratitudine al chiarissimo sig. prof. L. Ricciardi, che ci ha prestati gli strumenti meteorologici dell' Istituto Tecnico e Nautico, che egli presiede, e si unì a noi nella prima spedizione per suoi studî speciali. Ringraziamo anche i chiarissimi professori E. Canestrini e P. Boggio Lera che ci hanno prestati strumenti meteorologici appartenenii al Liceo Cutelli ed all'Osservatorio meteorologico della R. Scuola Enologica.

TAB. I. *Temperatura 26-27-28 luglio 1897.*

Gruppo	Mare	Porto	Catania	Nicolosi	Cantoniera	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni		
							Cat.-Nic.	Nic.-Cant.	Cant.-Etna
Mattutino	22,9°	23,2°	23,2°	20,4°	13,9°	7,1°	— 0,44°	— 0,55°	— 0,64°
Antimerid.	25.0	24,9	27,1	24,5	16,5	9,4	— 0,41	— 0,68	— 0,67
Meridiano	26,9	27,5	29,1	27,9	20,0	11,3	— 0,19	— 0,67	— 0,82
Pomeridiano	27,6	28,1	29,4	28,0	19,7	10,8	— 0,22	— 0,70	— 0,84
Serotino	25,9	26,7	26,9	24,3	16,7	8,7	— 0,41	— 0,65	— 0,75
Notturno	24,5	24,7	24,6	21,3	14,9	7,6	— 0,52	— 0,54	— 0,68
Media	25,5	25,9	26,7	24,4	17,0	9,2	— 0.36	— 0,63	— 0,73

TAB. II. *Temperatura 28-29 marzo 1898.*

Gruppo	Catania	Nicolosi	Cantoniera	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni		
					Cat.-Nic.	Nic.-Cant.	Cant.-Etna
Mattutino	12,1°	7,6°	1,7°	— 4,6°	— 0,70°	— 0,50°	— 0,59°
Antimerid.	13,6	9,7	3,4	— 4,7	— 0,61	— 0,53	— 0,76
Meridiano	14,6	12,7	3,7	— 3,9	— 0,30	— 0,77	— 0,71
Pomeridiano	13,6	10,7	3,5	— 3,8	— 0,45	— 0,61	— 0,69
Serotino	12,6	9,4	3,6	— 4,1	— 0,50	— 0,49	— 0,73
Notturno	12,6	8,5	2,0	— 3,5	— 0,64	— 0,55	— 0,52
Media	13,2	9,8	3,0	— 4,1	— 0,53	— 0,58	— 0,67

TAB. III. *Pressione atmosferica 26-27 luglio 1897.*

Gruppo	Porto	Catania	Nicolosi	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni	
					Cat.-Nic.	Nic.-Etna
Mattutino	mm 758,0	mm 752,8	mm 699,8	mm 537,3	mm — 8,281	mm — 7,248
Antimerid.	758,4	753,2	700,2	537,6	— 8,281	— 7,252
Meridiano	758,9	753,6	700,9	538,7	— 8,224	— 7,234
Pomeridiano	758,8	753,6	700,9	538,6	— 8,224	— 7,239
Serotino	758,6	753,5	700,8	538,2	— 8,224	— 7,252
Notturno	758,7	753,4	700,6	538,1	— 8,250	— 7,248
Media	758,5	753,3	700,5	538,1	— 8,250	— 7,243

TAB. IV. *Pressione atmosferica 28-29 marzo 1898.*

Gruppo	Catania	Nicolosi	Cantoniera	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni		
					Cat.-Nic.	Nic.-Cant.	Cant.-Etna
Mattutino	mm 748,6	mm 693,1	mm 600,5	mm 525,4	mm — 8,672	mm — 7,867	mm — 7,078
Antimerid.	749,1	694,1	601,1	526,3	— 8,594	— 7,901	— 7,050
Meridiano	750,6	694,9	602,2	526,7	— 8,703	— 7,876	— 7,116
Pomeridiano	749,6	694,1	601,8	526,3	— 8,672	— 7,842	— 7,116
Serotino	749,6	694,1	601,8	526,3	— 8,672	— 7,842	— 7,116
Notturno	749,4	693,9	601,3	526,0	— 8,672	— 7,867	— 7,097
Media	749,5	694,1	601,4	526,2	— 8,656	— 7,876	— 7,088

TAB. V. *Tensione del vapore acqueo 26-27-28 luglio 1897.*

Gruppo	Porto	Catania	Nicolosi	Cantoniera	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni		
						Cat.-Nic.	Nic.-Cant.	Cant.-Etna
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Mattutino	12,89	10,05	7,00	3,57	2,71	— 0,477	— 0,291	— 0,081
Antimerid.	14,81	12,75	7,96	4,85	3,32	— 0,748	— 0,264	— 0,144
Meridiano	17,61	13,33	8,99	6,86	3,87	— 0,678	— 0,181	— 0,281
Pomeridiano	17,35	13,56	9,54	5,86	4,10	— 0,628	— 0,313	— 0,165
Serotino	16,54	13,43	10,12	5,91	3 41	— 0,517	— 0,358	— 0,235
Notturno	15,04	12,41	7,84	4,31	2,77	— 0,714	— 0,300	— 0,145
Media	15,71	12,59	8,57	5,23	3,36	— 0,628	— 0,284	— 0,176

TAB. VI. *Tensione del vapore acqueo 28-29 marzo 1898.*

Gruppo	Catania	Nicolosi	Cantoniera	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni		
					Cat.-Nic.	Nic.-Cant.	Cant.-Etna
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Mattutino	8,55	6,27	4,57	3,09	— 0,356	— 0,144	— 0,139
Antimerid.	8,77	6,79	4,07	2,84	— 0,309	— 0,231	— 0,115
Meridiano	7,93	6,02	4,84	2,97	— 0,298	— 0,100	— 0,175
Pomeridiano	8,23	7,37	4,85	3,11	— 0,134	— 0,214	— 0,164
Serotino	8,26	6,29	4,53	3,07	— 0,308	— 0,149	— 0,137
Notturno	7,58	5,20	4,82	3,34	— 0,372	— 0,032	— 0,139
Media	8,22	6,32	4,61	3,07	— 0,297	— 0,145	— 0,145

TAB. VII. *Umidità relativa in centesimi 26-27-28 luglio 1897.*

Gruppo	Porto	Catania	Nicolosi	Cantoniera	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni		
						Cat.-Nic.	Nic.-Cant.	Cant.-Etna
Mattutino	62	47	38	28	36	— 1	— 1	+ 1
Antimerid.	63	48	34	34	38	— 2	0	0
Meridiano	64	43	30	39	38	— 2	+ 1	0
Pomeridiano	62	45	33	33	42	— 2	0	+ 1
Serotino	64	52	44	41	40	— 1	0	0
Notturno	65	54	40	34	36	— 2	0	0
Media	63	48	37	35	38	— 2	0	0

TAB. VIII. *Umidità relativa in centesimi 28-29 marzo 1898.*

Gruppo	Catania	Nicolosi	Cantoniera	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni		
					Cat.-Nic.	Nic.-Cant.	Cant.-Etna
Mattutino	81	80	88	92	0	+ 1	0
Antimerid.	76	75	69	85	0	— 1	+ 1
Meridiano	64	55	81	84	— 2	+ 2	0
Pomeridiano	71	76	82	87	+ 1	+ 1	0
Serotino	76	72	75	87	0	0	+ 1
Notturno	69	61	89	91	— 1	+ 2	0
Media	73	70	81	88	0	+ 1	+ 1

Matematica. — *Note au sujet de l'intégration approchée de certaines équations différentielles linéaires du second ordre.* Nota del conte MAGNUS DE SPARRE, presentata dal Socio SIACCI.

Je commencerai par faire une remarque au sujet de l'intégration des équations de la mécanique.

Si on envisage une question au point de vue de l'analyse pure, une valeur de la fonction n'est intégrale d'une équation différentielle que si en la substituant elle y satisfait rigoureusement. Au point de vue de la mécanique appliquée il n'en est pas absolument de même. En effet les coefficients qui figurent dans l'équation différentielle ne sont connus qu'avec une certaine approximation et toute valeur de la fonction qui substituée dans le premier membre de l'équation différentielle, fera prendre à ce premier membre une valeur plus petite que l'erreur pouvant résulter de l'incertitude qui existe (dans le cas particulier, où on se trouve) sur les coefficients de l'équation, peut être considérée comme une solution satisfaisante, au point de vue mécanique.

Si en effet la substitution de cette valeur ne rend pas le premier membre rigoureusement nul (mais seulement très petit) cela peut provenir aussi bien de l'erreur qui existe sur les coefficients que de celle provenant de la solution elle même.

On voit par là le grand intérêt que peuvent, au point de vue de la mécanique appliquée, présenter les solutions approchées des équations différentielles.

J'ai eu occasion de rencontrer une question de cette nature dans l'étude du mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité et je vais exposer le principe de la méthode qui m'a servi à la résoudre.

Les équations que je considérerai seront de l'une des deux formes

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \alpha^2\varphi(x)\,y = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha f(x)\frac{dy}{dx} + \alpha^p\varphi(x)\,y = 0 \tag{2}$$

où α est un très grand nombre, en valeur absolue, d'ailleurs quelconque, x, $f(x)$ et $\varphi(x)$ conservant au lieu de cela des valeurs finies pas très grandes entre les limites que l'on a à considérer.

La 1ère équation correspond au cas où le coefficient de y est très grand, cas où l'on pourra toujours mettre l'équation sous la forme (1), car il suffit pour cela de désigner par α un nombre tel que le quotient du coefficient de y par α^2 ait un module pas très grand.

La 2me équation correspond au cas où les coefficients de y et $\frac{dy}{dx}$ sont l'un et l'autre très grands, p pouvant d'ailleurs avoir une valeur absolument quelconque.

Nous considérerons comme solution satisfaisante de ces deux équations, au point de vue mécanique, une valeur de y telle qu'en la substituant dans le 1er membre de (1) ou de (2), le résultat contienne $\frac{1}{\alpha}$ en facteur.

Considérons d'abord l'équation (1).

Posons

$$y = e^{\alpha\eta}. \tag{3}$$

L'équation (1) devient

$$\alpha^2\eta'^2 + \alpha\eta'' + \alpha f(x)\,\eta' + \alpha^2\varphi(x) = 0. \tag{4}$$

Nous poserons alors

$$\eta' = z + \zeta \tag{5}$$

avec

$$z^2 + \varphi(x) = 0. \tag{6}$$

L'équation (4) deviendra

$$\alpha^2(2z\zeta + \zeta^2) + \alpha[z' + \zeta' + f(x)\,(z + \zeta)] = 0. \tag{7}$$

Posons alors

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\zeta_1 + \frac{1}{\alpha^2}\zeta_2.$$

Substituons dans (7) et égalons à zéro le coefficient de α et le terme indépendant de cette quantité nous aurons

$$2z\zeta_1 + z' + z\,f(x) = 0$$
$$2z\zeta_2 + \zeta_1^2 + \zeta_1' + \zeta_1 f(x) = 0$$

d'où

$$\zeta_1 = -\frac{z'}{2z} - \frac{1}{2} f(x)$$

$$\zeta_2 = -\frac{\zeta_1^2 + f(x)\zeta_1 + \zeta'_1}{2z}$$

et avec ce choix le 1er membre de (7) et par suite celui de (4) se réduit à

$$\frac{1}{\alpha}\left[2\zeta_1\zeta_2 + \frac{1}{\alpha}\zeta_2^2 + \zeta'_2 + \zeta_2 f(x)\right].$$

Par suite d'après l'hypotèse faite $y = e^{\alpha\eta}$ pourra être considéré comme une solution satisfaisante de l'équation (1). En supposant que z, ζ_1, ζ_2 *restent finis* dans le champs d'intégration *ce qu'il faudra toujours vérifier.*

Comme d'ailleurs l'équation (6) fournit deux valeurs pour z,

$$z_1 = \sqrt{-\varphi(x)} \quad , \quad z_2 = -\sqrt{-\varphi(x)}$$

on aura deux intégrales et par suite l'intégrale générale. On aura ensuite

$$\eta = \int (z + \zeta)\, dx.$$

Mais

$$\int \zeta_1\, dx = -\int \frac{z'}{2z}\, dx - \frac{1}{2}\int f(x)\, dx = \mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{2}\int f(x)\, dx$$

de sorte qu'en remarquant que ζ_1 ne change pas lorsque z change de signe et que ζ_2 change au lieu de cela de signe, on aura pour les deux intégrales

$$y_1 = \frac{\mathrm{A} e^{\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int f(x)\,dx + \frac{1}{\alpha}\int\zeta_2\,dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}}$$

$$y_2 = \frac{\mathrm{B} e^{-\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int f(x)\,dx - \frac{1}{\alpha}\int\zeta_2\,dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}}$$

Nous avons fait rentrer dans les constantes $\dfrac{1}{\sqrt{\pm i}}$.

On aura par suite pour l'intégrale générale

$$y = \frac{\mathrm{A} e^{\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx + \frac{1}{\alpha}\int\zeta_2 dx} + \mathrm{B} e^{-\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx - \frac{1}{\alpha}\int\zeta_2 dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}}\, e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}.$$

Le plus souvent on pourra négliger le terme en $\frac{1}{\alpha}$ dans l'intégrale et prendre par suite

$$y = \frac{Ae^{\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx} + Be^{-\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}} e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}.$$

Le cas de l'équation (2) peut se traiter directement d'une façon semblable, mais il se ramène de suite au précédent en faisant disparaître le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, il suffit pour cela de poser, comme on sait

$$y = ue^v$$

d'où

$$y' = u'e^v + uv'e^v$$
$$y'' = u''e^v + 2u'v'e^v + uv'^2e^v + uv''e^v$$

et l'équation devient

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[2v' + \alpha f(x)\right]\frac{du}{dx} + \left[v'^2 + v'' + \alpha v' f(x) + \alpha^p \varphi(x)\right]u = 0$$

on prendra alors

$$v' = -\frac{\alpha}{2} f(x)$$

d'où

$$v'' = -\frac{\alpha}{2} f'(x)$$

et l'équation deviendra

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha^2\left[\alpha^{p-2}\varphi(x) - \frac{1}{2\alpha} f'(x) - \frac{1}{4} f^2(x)\right]u = 0.$$

Si $p \leq 2$ l'équation sera de suite de la forme (1). Si au lieu de cela $p > 2$ on mettra α^p en facteur et en posant $\alpha^p = \alpha_1^2$ l'équation sera encore ramenée à la forme (1).

Toutefois il sera le plus souvent plus simple de traiter directement l'équation (2).

Si on y pose toujours

$$y = e^{\alpha\eta}$$

elle devient

$$\alpha^2\eta'^2 + \alpha\eta'' + \alpha^2\eta' f(x) + \alpha^p \varphi(x) = 0$$

ou

$$\eta'^2 + \eta' f(x) + \alpha^{p-2}\varphi(x) + \alpha^{-1}\eta'' = 0. \tag{8}$$

Nous poserons alors

$$\eta' = z + \zeta$$

avec

$$z^2 + z f(x) + \alpha^{p-2} \varphi(x) = 0$$

d'où

(9) $$z = -\frac{f(x) \pm \sqrt{f^2(x) - 4\alpha^{p-2} \varphi(x)}}{2}$$

et le 1[er] nombre de (8) deviendra

(10) $$2z\zeta + \zeta^2 + \zeta f(x) + \alpha^{-1}(z' + \zeta') = 0 .$$

Nous poserons alors, comme dans le cas précédent

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\zeta_1 + \frac{1}{\alpha^2}\zeta_2$$

et en égalant à zéro les coefficients des puissances -1 et -2 de α on aura

$$2z\zeta_1 + \zeta_1 f(x) + z' = 0$$
$$2z\zeta_2 + \zeta_1^2 + \zeta_2 f(x) + \zeta'_1 = 0$$

d'où

$$\zeta_1 = -\frac{z'}{2z + f(x)} \qquad \zeta_2 = -\frac{\zeta'_1 + \zeta_1^2}{2z + f(x)}$$

et on aura ainsi une solution approchée de l'équation (2). Si $p \leq 1$ auquel cas $p - 2 \leq -1$ on pourra développer la valeur de z et écrire

$$z = -\frac{1}{2} f(x) \pm \frac{1}{2} f(x) \left[1 - \frac{4\alpha^{p-2} \varphi(x)}{f^2(x)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$z_1 = -f(x) + \frac{\alpha^{p-2}\varphi(x)}{f(x)} + \frac{\alpha^{2p-4} \varphi^2(x)}{f^3(x)}$$
$$z_2 = - \frac{\alpha^{p-2}\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\alpha^{2p-4} \varphi^2(x)}{f^3(x)} .$$

La méthode s'applique également pour trouver les intégrales approchées des équations différentielles pour de très grandes valeurs de la variable.

Soit comme exemple l'équation

$$x\frac{d^2 y}{dx^2} + (2n + 1)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Dont nous voulons obtenir l'intégrale générale approchée pour x très grand en valeur absolue. Nous poserons

$$x = \alpha\xi$$

α étant égal au maximum du module de x pour les valeurs que l'on a à considérer, de telle sorte que ξ aura un module un peu inférieur à 1 mais peu différent de 1 et que α sera un très grand nombre.

L'équation devient

$$\frac{\xi}{\alpha}\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{2n+1}{\alpha}\frac{dy}{d\xi}+\alpha\xi y=0$$

ou

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{2n+1}{\xi}\frac{dy}{d\xi}+\alpha^2 y=0.$$

Équation de la forme (1).

Ici

$$f(x)=\frac{2n+1}{\xi}\qquad \varphi(x)=1\qquad (x \text{ étant remplacé par } \xi)$$

donc

$$\frac{1}{2}\int f(x)\,dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int\frac{d\xi}{\xi}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\xi\ ;\ e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}=\frac{1}{\xi^n\sqrt{\xi}}$$

$$\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx=i\xi$$

de plus

$$\zeta_1=-\frac{1}{2}\frac{2n+1}{\xi}=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\xi}$$

$$z=\pm i$$

et

$$\zeta_2=-\frac{\zeta_1^2+f(x)\zeta_1+\zeta'_1}{2z}=\pm\frac{i}{2}\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\frac{1}{\xi^2}=\pm\left(\frac{1}{4}-n^2\right)\frac{i}{2\xi^2}$$

donc

$$\int\zeta_2\,dx=\mp\left(n^2-\frac{1}{4}\right)i\int\frac{d\xi}{2\xi^2}=\pm i\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2\xi}.$$

On a donc pour l'intégrale générale de l'équation considérée

$$\frac{1}{\xi^n\sqrt{\xi}}\left[\mathrm{A}\,e^{\alpha i\xi+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{i}{2\alpha\xi}}+\mathrm{B}e^{-\alpha i\xi-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{i}{2\alpha\xi}}\right]$$

ou en remplaçant ξ par $\frac{x}{\alpha}$

$$\frac{1}{x^n\sqrt{x}}\left[\mathrm{A}_1 e^{ix+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{i}{2x}}+\mathrm{B}_1 e^{-ix-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{i}{2x}}\right]$$

ou enfin

$$\frac{1}{x^n\sqrt{x}}\left[\mathrm{C}\cos\left(x+\frac{n^2-\frac{1}{4}}{2x}\right)+\mathrm{D}\sin\left(x+\frac{n^2-\frac{1}{4}}{2x}\right)\right].$$

Si on néglige les termes en $\frac{1}{x}$ on retombe sur le résultat connu.

Si l'équation a un second membre on pourra déduire la solution de l'équation complète de l'intégrale générale de l'équation sans second membre, mais le plus souvent on pourra obtenir une intégrale particulière approchée développée suivant les puissances décroissantes de α. Si on a l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^n f(x)\frac{dy}{dx}+\alpha^p \varphi(x)\,y=\alpha^q \chi(x)$$

et si $p>n$ on posera

$$y=\alpha^{q-p}\eta_0+\alpha^{q-p-1}\eta_1+\alpha^{q-p-2}\eta_2$$

et égalant les coefficients des puissances semblables de α on aura des relations qui permettront de calculer $\eta_0\,\eta_1\ldots$

Si $n>p$ on poserait

$$y=\alpha^{q-n}\eta_0+\alpha^{q-n-1}\eta_1+\cdots$$

en continuant jusqu'à ce qu'on arrive à une approximation convenable.

Il faut toutefois remarquer que la méthode tombe en défaut si l'une des fonctions $\eta_0\,\eta_1\ldots$ devient infini ou prend même une valeur comparable à α, il y a donc une vérification indispensable à faire à ce sujet.

Matematica. — *Sulla trasformazione di Laplace.* Nota di Ugo Amaldi, presentata dal Corrispondente S. Pincherle.

Mi propongo di esporre un breve saggio preliminare delle proprietà di una certa *operazione distributiva*, della quale la classica *trasformazione di Laplace* (¹) rappresenta una determinazione o *ramo*. Il metodo che ho seguito è il metodo *sintetico*, cioè indipendente da ogni rappresentazione analitica dell'operazione, quale fu ideato ed applicato dal Pincherle in questi ultimi anni allo studio delle *operazioni distributive* (²).

1. Immagino di operare sugli enti della varietà V_ϱ di tutte le serie

$$\varphi=x^\varrho\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}a_n\,x^n\,,$$

dove ϱ è un parametro complesso e l'indice n varia nel campo dei numeri reali interi, e, prescindendo da ogni questione di convergenza, intendo incluse

(¹) Su questa operazione vedi: Poincaré, Americ. Journ. of Mathematics, vol. VII; Acta Math., Bd. VIII; Pincherle, Mem. dell'Acc. di Bologna, S. IV, t. VII e VIII; Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, I Bd., VII Abschnitt.

(²) *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, Math. Annalen, Bd. 49.

nella detta varietà anche le serie, che non convergono in nessun punto del piano della variabile complessa. È evidente che questa varietà ad infinite dimensioni è uno *spazio lineare*. I coefficienti delle serie si potranno dire *coordinate* degli enti che si considerano, e gli enti $x^{\rho+n}$ $(n = -\infty \cdots +\infty)$ rappresenteranno la figura di riferimento di tale sistema di coordinate.

Indicando con φ un ente generico dello spazio V_ρ, considero un'*operazione distributiva* L, che goda delle proprietà indicate dalle due equazioni simboliche

$$a) \qquad L(x\varphi) = DL(\varphi)$$
$$b) \qquad xL(\varphi) = -LD(\varphi),$$

dove il simbolo D rappresenta l'ordinaria operazione di derivazione.

Si ammetta per ora l'esistenza di una siffatta operazione, che, anticipando una denominazione, che sarà giustificata in fine alla presente Nota, designerò col nome di *trasformazione di Laplace.*

Ricordando la definizione di *derivata funzionale* di un'operazione distributiva [1] e indicandola con un accento, si ha dalle $a)$, $b)$ che la derivata funzionale della operazione L è legata all'operazione stessa dalla relazione

$$L' = LD + DL.$$

Per combinazione delle due equazioni $a)$ e $b)$ si ottiene

$$c) \qquad Lx^m D^n\varphi = (-1)^n D^m x^n L\varphi.$$

Infine con iterazione e successiva combinazione delle $a)$, $b)$ si ottengono i tre sistemi di equazioni simboliche

$$(1) \qquad L^2x\varphi = -xL^2\varphi, \quad L^2D\varphi = -DL^2\varphi;$$
$$(2) \qquad L^3x\varphi = -DL^3\varphi, \quad L^3D\varphi = xL^3\varphi;$$
$$(3) \qquad L^4x\varphi = xL^4\varphi, \quad L^4D\varphi = DL^4\varphi;$$

che esprimono proprietà delle operazioni L^2, L^3, L^4 rispettivamente.

2. Per riconoscere se esiste effettivamente un'operazione, che renda soddisfatte le equazioni $a)$ e $b)$, e per costruirla su ogni ente di V_ρ, cerco quale sarebbe l'effetto prodotto da essa sugli enti fondamentali $x^{\rho+n}$$(n = -\infty \cdots +\infty)$. Seguendo le notazioni del Pincherle, pongo $L(x^m) = \xi_m(x)$. Sostituisco $x^{\rho+n-1}$ a φ nelle $a)$ e $b)$, e ottengo per $\xi_{\rho+n}(x)$, funzione dell'indice intero n e della variabile complessa x, il sistema di equazioni miste differenziali e alle differenze

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_{\rho+n}(x) = D\xi_{\rho+n-1}(x) \\ x\xi_{\rho+n-1}(x) = -(\varrho + n - 1)\,\xi_{\rho+n-2}. \end{cases}$$

[1] Pincherle, *Mémoire sur le calc. fonct. distr.*, Cap. II, §. 56.

Integrando questo sistema si ottiene

$$\xi_{\rho+n}(x) = e^{\pi i(\rho+n)}\,\Gamma(\rho+n+1)\,x^{-(\rho+n+1)}\,, \tag{5}$$

dove al solito con $\Gamma(n)$ si indica l'*integrale euleriano di seconda specie.*

3. Da quanto precede si deduce facilmente qualche notizia sulla natura dell'operazione L^2. Ho

$$L^2(x^{\rho+n}) = L(\xi_{\rho+n}) = e^{-\pi i}\,\Gamma(\rho+n+1)\,\Gamma(-\rho-n)x^{\rho+n}\,.$$

Ma, per una ben nota proprietà della funzione Γ, sussiste l'eguaglianza

$$\Gamma(\rho+n+1)\,\Gamma(-\rho-n) = (-1)^{n+1}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(-\rho-1):$$

ne discende

$$L^2(x^{\rho+n}) = e^{\pi i\rho}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(-\rho-1)\,(-x)^{\rho+n}\,.$$

Poichè non si riguardano come distinte due operazioni distributive, che differiscono per un'operazione di moltiplicazione a moltiplicatore costante, posso concludere che:

Nello spazio V_ρ *l'operazione* L^2 *coincide con l'operazione* S_{-x} *di sostituzione, per la quale* $S_{-x}\,\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Ne risulta che, nello spazio V_ρ, la L è commutabile con la S_{-x}.

Della L^2 si ottiene agevolmente lo sviluppo in serie di potenze intere e positive della D, applicando il metodo dei coefficienti indeterminati. Si ricordino invero le equazioni (1), le quali esprimono proprietà della L^2: e in esse si sostituisca uno sviluppo

$$L^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\,D^n\,,$$

dove $\alpha_n(x)$ è una funzione, da determinarsi, dell'indice intero positivo n e della variabile complessa x. Per essa si ottiene il sistema di equazioni miste differenziali e alle differenze

$$\begin{cases} (n+1)\,\alpha_{n+1} + 2x\alpha_n = 0 \\ D\alpha_n + 2\alpha_{n-1} = 0\,, \end{cases}$$

il cui integrale è dato da $\alpha_n(x) = (-1)^n \frac{2^n}{n!}\alpha_0\,x^n$: α_0 è costante arbitraria.

Scelto $\alpha_0 = 1$, ottengo per L^2 lo sviluppo

$$L^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}\,x^n\,D^n\,.$$

Dall'osservazione fatta dianzi risulta ancora che:

La operazione L *è, nello spazio* V_ρ, *ciclica dell'ordine* 4.

Dall' eguaglianza simbolica $L^4 = 1$ discende [1]

$$L^{-1} = L^3 .$$

Poichè la L, come appare chiaro dal numero precedente, è nello spazio V_ρ a determinazione unica, l' ultima eguaglianza ci dice che la operazione L^{-1}, *inversa* di L, è essa pure in quello spazio a determinazione unica, e, quindi che la trasformazione di Laplace non ammette radici entro lo spazio V_ρ.

Ricordo da ultimo le equazioni simboliche (2): con un procedimento analogo a quello seguìto al n. 2, ottengo per gli enti $\xi_{\rho+n}(x)$, relativi ad $L^3 = L^{-1}$ in V_ρ, l' espressione

$$\xi_{\rho+n}(x) = \Gamma(\varrho + n + 1)\, x^{-(\rho+n+1)} .$$

4. Le asserzioni dei n. 2 e 3 non restano valide per qualsiasi valore del parametro ϱ. Poichè l' integrale euleriano di seconda specie ammette come punti singolari tutti i punti del piano complesso, a cui sono affissi numeri interi negativi, l' espressione assegnata al n. 2 per l' ente $\xi_{\rho+n}(x)$, relativo alla L, perde ogni significato per i valori $n = -k-2, -k-3, -k-4, \ldots$ dell' indice, quando sia $\varrho = k$, per k intero (positivo o negativo): cioè la determinazione dell' operazione L, fissata al n. 2, viene a mancare in infiniti punti di ciascuno spazio V_ρ, pel quale il parametro abbia un valore intero. Basterà evidentemente considerare a parte lo spazio V_0 delle serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_n$, al quale, come è chiaro, si riducono tutti gli spazi V_ρ a parametro intero: ma io qui considererò più in particolare lo spazio $\overline{V}_0$, che si ottiene da V_0, togliendone gli enti fondamentali x^{-1} e $x^0 = 1$. In tale spazio il sistema (4) si riduce al sistema

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi_n(x) = D\xi_{n-1}(x) \\ x\xi_n(x) = -n\xi_{n-1}(x) , \end{cases} \qquad (n = -\infty , \ldots , -2 , 2 , 3 , \ldots , \infty)$$

il quale è soddisfatto dalle espressioni

$$\begin{cases} \xi_{-n}(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & (n = 2 , 3 , \ldots , \infty) \\ \xi_n(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)} & (n = 1 , 2 , \ldots , \infty) . \end{cases}$$

Queste perciò definiscono entro $\overline{V}_0$ un'operazione, a determinazione unica, soddisfacente alla definizione della L. Si verifica senza difficoltà che tale operazione gode in $\overline{V}_0$ della proprietà, di esser ciclica d'ordine 4 [2].

[1] Quest' eguaglianza si poteva dedurre direttamente, osservando che le equazioni (2) coincidono con quelle, che dalle $a)$, $b)$ si deducono per la operazione L^{-1}.

[2] Mi riserbo di tornare in altra occasione sulla definizione di L entro l'intero spazio V_0 delle serie di Laurent. Intanto non sembri troppo arbitraria la modificazione introdotta dianzi in tale spazio. Lo studio del sistema (6), considerato per tutti i valori interi del-

5. Prima di procedere oltre osserverò che la scelta degli spazi V_ρ non è collegata in modo necessario con la definizione dell'operazione L: anzi, in ultima analisi, le sole proprietà di tali spazi, che stanno in relazione essenziale con la natura dell'operazione dianzi studiata, sono la *linearità* e la *invarianza*, in guisa che noi possiamo, senza che mutino i caratteri e le proprietà dell'operazione L, considerata in sè medesima, sostituire a quegli spazi altri spazi di funzioni, purchè siano *lineari*, ed *invarianti* rispetto alla L.

6. Accanto ad ogni operazione distributiva A, si può considerare un'altra operazione $\overline{A}$, che fu detta *aggiunta* della prima [1], e che, nel caso, in cui l'operazione distributiva data sia una forma differenziale lineare, si riduce alla solita *aggiunta di Lagrange.*

Volendo studiare l'*aggiunta* $\overline{L}$ di L, debbo anzitutto accennare al modo, in cui è stata definita in generale l'*aggiunta* di un'operazione distributiva. Dato uno spazio, il quale sia lineare e invariante rispetto all'operazione A che si considera, e, di più, contenga insieme con ogni suo ente φ anche l'ente $x\varphi$, si suppone definita *in qualsiasi modo* un'operazione, che sia applicabile ad ogni coppia φ, f di enti dello spazio dato: si indica con (φ, f) e si ammettono per essa le seguenti proprietà:

α) di essere a determinazione unica;

β) di essere distributiva tanto rispetto ad f che rispetto a φ;

γ) di essere tale che se, per ogni funzione f dello spazio, si ha $(\varphi, f) = (\varphi_1, f)$ ne debba risultare $\varphi = \varphi_1$, e se, per ogni funzione φ si ha $(\varphi, f) = (\varphi, f_1)$, ne debba risultare $f = f_1$;

---

l'indice, porta a concludere l'esistenza di due rami di operazione, che soddisfanno bensì alle equazioni *a*) e *b*), ma non trasformano in sè stesso lo spazio V_0, e perciò non godono di gran parte delle proprietà dimostrate precedentemente per la L negli spazi V_ρ. Di questi due rami l'uno trasforma lo spazio $S'(x^{-1}, x^{-2}, \ldots, x^{-n}, \ldots)$ delle serie di potenze intere negative, prive di termine costante, nello spazio $S(1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots)$ delle serie di potenze intere positive, e ammette come radici gli enti $1, x, x^2, \ldots$ e quindi tutti gli enti dello spazio S: l'altro è a determinazione multipla, in quanto ad ogni funzione ne fa corrispondere infinite, differenti fra loro pel valore di una costante additiva arbitraria, e trasforma lo spazio S nello spazio S'. Dirò, per incidenza, che quest'ultimo ramo ammette il seguente sviluppo in serie di potenze intere dell'operazione D:

$$L = D^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n-1}}{n!} + \frac{x^{n-3}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^{-(n-1)}}{1!} + x^{-(n+1)} \right) D^n .$$

Ora, perchè fosse applicabile allo spazio V_0 la teoria che vale per la L negli spazi V_ρ generici, bisognerebbe deteterminare un ramo di L, che non fosse *degenere* in V_0 e trasformasse tale spazio in sè stesso. L'esame dei due rami di L dianzi considerati suggerisce l'idea di connettere *convenzionalmente* la determinazione del primo ramo, relativa allo spazio S', con la determinazione del secondo ramo relativa allo spazio S. Questa connessione non è consentita dal sistema (6) se non nello spazio $\overline{V}_0$, il quale si può dire *intersezione* dei due *iperpiani* di V_0 che son definiti dalle equazioni $a_{-1} = 0$ ed $a_0 = 0$.

[1] Pincherle, *Sull'operazione aggiunta*, Rend. delle sessioni dell'Acc. di Bologna, 1897-1898.

δ) di essere tale che $(x\varphi, f) = (\varphi, xf)$.

Un' operazione $\overline{A}$ si dice *aggiunta* di A quando sia $(A(\varphi), f) = (\varphi, \overline{A}(f))$.

Fra i teoremi dimostrati in proposito ricorderò il seguente [1]: « Se $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots, \overline{X}$ sono le aggiunte delle operazioni $A, B, C, \ldots, X$ rispettivamente, e si ha $X = ABC\ldots$ si avrà $\overline{X} = \ldots \overline{C}\overline{B}\overline{A}$ ».

Ora designo con W uno spazio qualsiasi, che goda, rispetto alla L, delle proprietà dianzi indicate in generale [2]: in esso avremo

$$(Lx\varphi, f) = (\varphi, x\overline{L}f).$$

Ma per la a), per il teorema or ora enunciato e per essere l' aggiunta $\overline{D}$ della derivazione D uguale a $-D$, viene:

$$(Lx\varphi, f) = (DL\varphi, f) = (\varphi, \overline{L}\overline{D}f) = -(\varphi, \overline{L}Df);$$

quindi si conclude, per la definizione dell' operazione (φ, f),

$$x\overline{L}f = -\overline{L}Df.$$

Similmente si ha

$$(xL\varphi, f) = -(\varphi, \overline{L}xf):$$

d' altra parte, in virtù della b),

$$(xL\varphi, f) = -(LD\varphi, f) = -(\varphi, \overline{D}\overline{L}f) = (\varphi, D\overline{L}f);$$

quindi

$$\overline{L}(xf) = D\overline{L}f.$$

Concludendo, ottengo per la operazione $\overline{L}$ le medesime equazioni simboliche assegnate per la L: posso quindi enunciare il teorema:

La trasformazione di Laplace coincide con la sua aggiunta.

7. Lo Schlesinger ha dimostrato [3] che « la *aggiunta* (di Lagrange) della trasformata di Laplace di una forma differenziale lineare di rango 1 è tale, che la sua trasformata di Laplace è la *aggiunta* della primitiva ».

Il teorema del n. precedente permette di generalizzare questa osservazione ad un' operazione distributiva qualsivoglia. Sia A un' operazione distributiva qualsiasi; pongo

$$LAL^{-1} = A_1.$$

Poichè le operazioni distributive formano un *gruppo*, sarà distributiva, insieme con L, A, L^{-1}, anche la A_1. Si avrà allora pel teorema enunciato al n. precedente

$$\overline{A}_1 = \overline{L^{-1}}\overline{A}\overline{L}.$$

Ma abbiamo dimostrato dianzi che $\overline{L}L^{-1} = 1$ e quindi che $L\overline{L^{-1}} = 1$; ne viene

$$L\overline{A}_1 L^{-1} = \overline{A}.$$

(1) Pincherle, *Sull' operazione aggiunta*, § 6.

(2) Di tutte e tre quelle proprietà godono gli spazi V_ρ generici, non per altro lo spazio $\overline{V}_0$.

(3) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. I Bd., S. 426.

Dunque *la aggiunta* $\overline{A}_1$ *della trasformata di Laplace* A_1 *di un' operazione distributiva* A *qualsiasi è tale, che la sua trasformata di Laplace coincide con l' aggiunta di* A.

8. L' operazione L può essere usata per trasformare operazioni distributive di tipo noto in operazioni meno studiate, e quindi per dedurre, da proprietà conosciute di quelle, nuove proprietà per queste.

Considero, p. es., una qualsiasi forma differenziale lineare F, i cui coefficienti siano serie di potenze intere positive della x: sia precisamente

$$F = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} a_{rs} D^r x^s .$$

Avrò per la c),

$$LFL^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s a_{rs} x^s D^r ,$$

cioè otterrò lo sviluppo in serie di potenze della D, di un'operazione, i cui coefficienti sono tutti polinomî dello stesso grado n. Reciprocamente, un semplice computo di parametri ci assicura che ogni operazione di siffatto tipo si può riguardare come la trasformata di Laplace di una forma differenziale lineare, avente come coefficienti delle serie di potenze intere positive della variabile.

Considero in secondo luogo come la L trasformi le operazioni distributive *normali*, cioè quelle del tipo

$$A = \sum_{r=0}^{\infty} x^r \alpha_r D^r ,$$

ove sia $\alpha_r = \sum_{s=0}^{\infty} a_{r.s} x^s$. Ho allora

$$LAL^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^r a_{r.s} D^{r+s} x^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^r a_{r.s} \Big(x^r D^{r+s} + r \binom{r+s}{1} x^{r-1} D^{r+s-1} +$$

$$+ r(r-1) \binom{r+s}{2} x^{r-2} D^{r+s-2} + \cdots + r! \, D^s \Big),$$

cioè ottengo, come trasformata di un' operazione *normale*, una serie di potenze intere e positive di D, i cui coefficienti sono polinomî di grado, rispettivamente, *non maggiore* dell' esponente della relativa potenza di D. Inversamente, la L^{-1} trasforma ogni operazione siffatta in un' operazione *normale*.

Dalla espressione data or ora di LAL^{-1} discende chiaramente, che le sole operazioni *normali*, che sono trasformate dalla L in forme differenziali

lineari, sono le forme differenziali lineari, (*normali*) a coefficienti razionali. Reciprocamente, condizione non pur necessaria, ma anche sufficiente, affinchè una forma differenziale lineare

$$F = P_0 D^0 + P_1 D + P_2 D^2 + \cdots + P_m D^m$$

sia dalla L^{-1} trasformata in una forma differenziale lineare *normale* (a coefficienti razionali) si è che in essa $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m$ siano polinomi di grado, ciascuno, *non maggiore* dell'indice rispettivo. In particolare rendono soddisfatta questa condizione quelle forme differenziali lineari, in cui i successivi coefficienti sono polinomi di grado, ciascuno, eguale al rispettivo esponente della D, ed è noto che siffatte forme, ove ogni radice $r$pla di P_0 sia $(r-1)$pla per P_1, $(r-2)$pla per $P_2, \ldots$, radice semplice per P_r, appartengono alla classe del Fuchs. Si verifica invero direttamente che le forme differenziali lineari *normali*

$$\Phi = x^n D^n + x^{n-1}(a_{0.n-1} + a_{1.n-1}x) D^{n-1} + x^{n-2}(a_{0.n-2} + a_{1.n-2}x + a_{2.n-2}x^2) D^{n-2} + \cdots + \\ + (a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + \cdots + a_{n.0}x^n) D^0$$

sono trasformate dalla L in forme differenziali lineari F, in cui ogni coefficiente P_i è un polinomio di grado i $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$. Reciprocamente, noterò che una *qualsivoglia* forma differenziale lineare del Fuchs si può considerare (a meno, in certi casi, di un semplicissimo cambiamento di funzione) quale trasformata di Laplace di una forma Φ. Le equazioni $\Phi = 0$, ci danno una classe di equazioni differenziali lineari a integrali *irregolari* (nell'intorno del punto $x = \infty$), che, sotto le restrizioni indicate dianzi per i coefficienti, la L trasforma in equazioni (del Fuchs) a integrali *regolari* nell'intorno di ogni loro punto singolare (¹).

9. Nell'Analisi si dà il nome di *trasformazione di Laplace* alla trasformazione di φ in ψ

$$\psi(z) = \int_l \varphi(x)\, e^{zx}\, dx\,.$$

Questa trasformazione, in ogni spazio lineare di funzioni analitiche, quando si scelga convenientemente la linea l nel piano complesso, rappresenta un'operazione distributiva, soddisfacente alle $a)$, $b)$. Essa quindi fornisce, in ogni siffatto spazio, l'espressione analitica di un *ramo* dell'operazione L.

(¹) Le $\Phi = 0$ sono un caso particolare delle ben note equazioni del Poincaré: vedi American Journal of Mathematics, vol. VII: e Acta Mathematica, Bd. VIII.

Fisica molecolare. — *Sull'angolo di raccordamento tra le faccie cristalline dell'allume di rocca e le soluzioni sature dello stesso sale* [1]. Nota del dott. A. Rota, presentata dal Socio Blaserna.

1. Il problema di investigare e definire le circostanze, per le quali una determinata sostanza presenta nel cristallizzare un dato complesso di forme a preferenza di un altro, ossia quello che i cristallografi chiamano l'abito d'un cristallo, ha da lungo tempo richiamato l'attenzione sia dei naturalisti, sia di chi si occupa della così detta fisica molecolare. In natura i cristalli offrono abito diverso a seconda dei giacimenti in cui si trovano; in Laboratorio si ottengono da diversi solventi, o dallo stesso solvente in condizioni diverse, p. es. di temperatura e pressione, cristalli di una medesima sostanza, i quali presentano forme diversissime, per quanto riferibili sempre alla stessa forma fondamentale nel senso cristallografico; basti citare il noto esempio dei cristalli di cloruro di sodio e di allume, i quali possono ottenersi cristallizzati sia in cubi sia in ottaedri.

Curie e Sohnke [2] hanno con considerazioni teoriche speciali mostrato, quanto dovesse importare nel caso di cristalli, la conoscenza della *costante di capillarità* fra le faccie di una forma e la soluzione satura della sostanza ed il St. Berent [3] ha adottato come metodo sperimentale la determinazione dell'angolo di raccordamento per le diverse forme (cubo ed ottaedro nel salgemma) e le diverse soluzioni che ad esse danno luogo.

È chiaro che questa determinazione presenta di per sè un grande interesse, indipendentemente da qualsiasi considerazione teorica avente più o meno per base concetti di attrazioni molecolari, e in questo senso mi sono proposto di eseguire per l'allume ($K_2SO_4 + Al_2(SO_4)^3 + 24H_2O$) l'analoga ricerca a quella del St. Berent per il salgemma e per la silvina.

Mi sono procurato anzitutto due soluzioni dalle quali l'allume cristallizzasse in ottaedri ed in cubi. La prima, che chiamerò soluzione ottaedrica, si ottiene sciogliendo l'allume puro nell'acqua distillata.

Per avere la seconda, che dirò cubica, ho adoperato una polvere rossastra proveniente dalle *allumiere* di Tolfa (Civitavecchia). Questa polvere è il prodotto della macinazione e successiva torrefazione fra 300° e 400° dell'*al-*

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.

[2] Sohnke Groths, Zeitschrift f. Kristallographie u. Mineralogie, vol. 13, pag. 214.; Curie Bulletin d. l. Société minéralogique de France, 1885, vol. 8, pag. 145.

[3] Groths, Zeitschr. f. Kryst. u. Miner., 1896, vol. 26, pag. 529.

lumite. Per estrarre l'allume ho trattato quella polvere con acqua, nella quale il sale s'è disciolto, e poi l'ho purificato con successive cristallizzazioni. I cristalli derivanti da tali soluzioni erano principalmente cubici.

Questa soluzione doveva per certo essere chimicamente diversa dalla ottaedrica, però di questo lato del problema non era mio compito l'occuparmi, bensì solo delle relazioni fisiche di capillarità fra le due soluzioni e le faccie ora del cubo ora dell'ottaedro.

2. Si trattava dunque di determinare l'angolo di raccordamento fra le due soluzioni sature cubica ed ottaedrica ed una faccia del cubo o dell'ottaedro, con che aveva quattro valori angolari differenti. Indicando con le lettere maiuscole O, C questi valori quando la faccia cimentata era l'ottaedro od il cubo, e con gli indici o c, secondo che il liquido a contatto era soluzione ottaedrica o cubica, i quattro valori angolari verrebbero indicati con

$$O_o \; O_c \; C_o \; C_c.$$

Poteva però nascere il dubbio, che la composizione dell'allume nei due casi non fosse eguale, ma che l'allume cubico ricavato dalla soluzione cubica, che contiene altre sostanze disciolte, contenesse alla sua volta delle impurità sia sotto forma di soluzione solida, sia anche semplicemente in forma di inclusioni.

Per avere quindi un paragone sicuro conveniva cimentare entrambi gli allumi, cioè sia le faccie ottaedriche e cubiche (artificiali) dell'allume ricavato dalla soluzione ottaedrica, sia le faccie cubiche ed ottaedriche (artificiali) di quello ricavato dalla soluzione cubica.

Indicando quindi cogli indici superiori o, c i due casi dell'allume ottenuto dalla soluzione ottaedrica e di quello ottenuto dalla soluzione cubica, si hanno gli otto valori angolari:

$$O_o^o \; O_c^o \; C_o^o \; C_c^o$$
$$O_o^c \; O_c^c \; C_o^c \; C_c^c.$$

3. Concentrate le soluzioni (rese pure per cristallizzazioni successive) fino a saturazione e lasciatele riposare, ottenni sul fondo dei recipienti dei piccoli cristalli, i quali sospesi poi nelle soluzioni stesse ingrandirono lentamente dando delle forme assai regolari.

Per facilitare l'evaporazione del solvente chiusi i cristallizzatori in una cappa, dove una fiamma suscitava una attivissima corrente d'aria.

Ottenuti così cubi ed ottaedri di conveniente grossezza, essi non presentavano le faccie esattamente piane, e per persuadersi di ciò bastava osservarvi qualche oggetto per riflessione; le immagini spezzate ed irregolari rivelavano le irregolarità della faccia. Ora invece era necessario avere faccie perfettamente liscie ed il più possibile piane. Oltre a ciò, per raddoppiare il numero delle esperienze e per meglio assodare il valore di esse, doveva

tagliare sul cubo delle faccie di ottaedro e sull' ottaedro delle faccie del cubo. Questa operazione la feci segnando sugli spigoli uscenti da un vertice i punti di intersezione col piano segante e poi raschiando con cura il cristallo, finchè il piano ottenuto passasse pei punti segnati. Aveva così faccie naturali e faccie artificiali poco levigate e poco regolari: per averle come convenivano alle esperienze, dovetti ricorrere ad un modo più delicato: le lisciai con cura contro un pezzo di cuoio, spalmato di finissima polvere di *allume* rispettivamente cubico ed ottaedrico; e poi, per portare la levigatezza a massimo grado, bagnai per qualche momento la faccia colla soluzione, strofinandola poscia contro un pezzo di tela finissima sovrapposto al cuoio.

Nessuna faccia era dunque tal quale l' avevo ottenuta naturalmente, ma tutte avevano subìto l' identica operazione di pulitura.

4. Per misurare l' angolo di raccordamento usai del metodo suggerito dal Quincke [1]. Una goccia si trova sopra un piano, essa prenderà la sua forma di equilibrio e la base sarà un cerchio. Consideriamo una sezione meridiana del sistema. All' intersezione della curva meridiana colla retta sezione del piano facciamo cadere un raggio luminoso. Esso verrà riflesso dalla superficie piana e dall' ultimo elemento della curva: i due raggi riflessi formeranno un angolo doppio di quello sotto il quale la curva incontra la retta. Il fatto è perfettamente analogo a quanto avviene allorchè si misuri l' angolo di due faccie speculari aventi uno spigolo comune.

Per la misura dell' *angolo di raccordamento* basterà dunque portare il cristallo colla goccia nel centro di un goniometro verticale, e misurare con una mira le direzioni dei due raggi riflessi.

Per avere delle goccie abbastanza piccole il procedimento era semplicissimo. Versava un po' di soluzione in un piccolo imbuto fisso ad un sostegno, e avente per collo un tubo capillare, tirato all' uopo alla fiamma. Non appena all' orifizio del tubo vedeva la goccia raggiungere la grandezza conveniente, la raccoglieva sulla faccia preparata del cristallo toccando con questa un punto della goccia.

5. Veniamo ora ai risultati sperimentali che sono raccolti nel seguente specchietto. I valori rappresentano le medie di numerosissime esperienze. Nella considerazione di questi valori bisogna tener conto delle difficoltà sperimentali in generale e della incertezza delle letture; da considerazioni sulla natura delle esperienze mi consta che le distanze dei valori estremi dalle medie sono anche minori di quelle che si potevano prevedere ($\pm 20'$). Potrei qui portare i risultati di una qualunque delle serie di esperienze, ma siccome tratterebbesi di una sterile sequela di numeri press' a poco eguali fra di loro, trovo inutile il farlo, anche perchè non è di essenziale importanza ogni sin-

[1] Pogg., Annalen, CXXXIX, pag. 1, 1871.

gola lettura di una serie, ma bensì il criterio che ognuno può formarsi dai seguenti numeri:

$$O_o^o = 10^\circ 18' ; O_c^o = 15^\circ 10' ; C_o^o = 15^\circ 23' ; C_c^o = 10^\circ 25'$$
$$O_o^c = 10^\circ 13' ; O_c^c = 15.16 ; C_o^c = 15^\circ 49' ; C_c^c = 10^\circ 19'.$$

Dall' esame di questi valori risulta immediatamente che, nei limiti della precisione raggiungibile in questo genere di misure, i valori ottenuti con faccie ricavate dall'allume cristallizzato dalla soluzione cubica ed ottaedrica sono uguali e potremo quindi prendendo le medie trascurare l'indice superiore e scrivere il risultato finale:

$$O_o = 10^\circ 16' \qquad O_c = 15^\circ 13'$$
$$C_o = 15^\circ 36' \qquad C_c = 10^\circ 22'$$

da cui si ricava subito, che l'angolo di raccordamento fra una soluzione e la faccia della forma, a cui la stessa soluzione dà luogo, è minore dell'angolo fra essa soluzione ed una faccia a cui non dà luogo. Ossia più brevemente. *Da una soluzione cristallizza quella forma le cui faccie presentano un angolo di raccordamento minore.*

Abbiamo così potuto ottenere una relazione fisica fra le forme cristalline ed i liquidi, in seno ai quali esse si generano.

C' è poi un altro risultato che mi sembra degno di molta attenzione, che cioè i valori fra soluzione e forma corrispondente O_o C_c come pure quelli fra soluzione e forma non corrispondente O_c C_o sono fra loro sensibilmente uguali.

6. Le conclusioni alle quali, siamo giunti, si ricavano da esperienze fatte sopra due sole forme, cioè la cubica e l'ottaedrica: per fare un passo avanti importerebbe conoscere il comportamento di altre forme. Scelsi la forma del rombododecaedro: tagliando ora delle faccie artificiali 110 da cristalli di allume sia cubico sia ottaedrico e cimentandole colle due soluzioni, ottenni quattro serie di valori sensibilmente concordanti varianti da 13°. 15′ a 13°. 33′ con una media di 13.24. Dunque l'angolo di raccordamento fra la faccia del rombododecaedro e le due soluzioni è lo stesso ed è intermedio fra i valori antecedentemente ottenuti.

7. Se i risultati ottenuti per le faccie del cubo e dell'ottaedro conducessero ad ammettere come criterio di più probabile frequenza di una forma il minore angolo di raccordamento fra la faccia della forma e la soluzione, si dovrebbe concludere che debba essere più frequente avere da una soluzione di allume nell'acqua cristalli della combinazione ottaedro e rombododecaedro, che non della combinazione ottaedro-cubo: questo però non è. E che non debba essere, si comprende riflettendo, che per legge di continuità i valori

dell' *angolo di raccordamento* di faccie vicinissime alle ottaedriche, e quindi di simboli complicati, si avvicinerebbero a quelli relativi all' ottaedro; invece la presenza di faccie vicinali all' ottaedro è completamente esclusa. Si vede quindi, che se le presenti ricerche mostrano un probabile legame fra l' angolo di raccordamento per le faccie d' una data forma e la frequenza o sviluppo relativo di questa forma, questo legame è lontano dall' avere una natura semplice, entrando in gioco molti altri fattori, la cui natura sfugge presentemente al nostro apprezzamento.

8. Un' obbiezione potrebbe sorgere circa la sicurezza dei valori assegnati all' angolo di raccordamento sulle diverse faccie, le quali non erano, per così dire, naturali ma avevano tutte subìto un trattamento per la politura. Trattandosi di fenomeni superficiali quest' obbiezione ha tanto maggior valore, poichè malgrado il trattamento fosse, per quanto è fisicamente possibile, eguale in tutti i casi, non è escluso che la politura presa dalle faccie ottaedriche fosse diversa da quella presa dalle faccie cubiche. Se ora esisteva uno strato di materia eterogenea ed era tale da alterare le azioni tra solido e liquido, esso non era sufficiente ad impedire l' azione dell' allume sottostante sulla soluzione sovrapposta. Infatti esperienze analoghe hanno una notevolissima concordanza, che non può essere casuale, dato il grandissimo numero di letture fatte. Le esperienze fatte invece sopra faccie diverse, presentano una differenza notevole e costante nei casi corrispondenti che non dà luogo al dubbio dell' intervento di errori grossolani d' osservazione. Di più concordano i valori di faccie ottaedriche e soluzioni ottaedriche, e di faccie cubiche e soluzioni cubiche.

Ciò che sopra ogni cosa interessa notare e che risulta chiarissimo, è che la differenza fra i numeri trovati porta una *differenza specifica nei fenomeni.*

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 4 settembre 1898

Fisica matematica. — *Esposizione di due nuovi metodi per determinare l' espressione della densità in ogni punto di uno strato ellissoidico equipotenziale.* Nota di P. PACI, presentata dal Socio E. D' OVIDIO.

Credo interessante di far conoscere due nuovi metodi che conducono alla nota espressione della densità in ogni punto di una superficie ellissoidica, i quali io credo possano servire d' indirizzo in altri casi più complicati.

Il secondo di tali metodi ha inoltre il particolare vantaggio di condurre ad alcuni teoremi nuovi intorno alle funzioni sferiche.

Per l' esposizione del primo metodo si consideri l' equazione della superficie ellissoidica sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

e per semplicità se ne indichi il primo membro con f. Inoltre si indichi con Δf il noto parametro differenziale di primo ordine, e si indichino con f' e $\Delta f'$ le analoghe espressioni pel punto (x', y', z') della superficie stessa.

Allora, se si assume come senso positivo della normale alla superficie in un punto qualunque il senso verso l' esterno e si indica con n la normale stessa, con P_0 la componente dell' attrazione nel punto (x, y, z) e con K e K' le densità nel punto potenziato e nel punto di coordinate correnti (x', y', z'), si avrà

$$P_0=\int K' \frac{\cos(rn)}{r^2}\, ds',$$

dove con r al solito è indicata la distanza dei due punti (x, y, z), (x', y', z'), con ds' l'elemento della superficie e con (rn) l'angolo formato da r colla normale positiva.

Se ora immaginiamo la sfera di raggio uguale ad uno con centro nel punto potenziato ed indichiamo con $d\sigma'$ l'elemento della sua superficie che corrisponde all'elemento ds', si avrà la relazione

$$ds' \cos(rn') = - r^2 d\sigma' ;$$

per cui si potrà porre

$$P_0 = -\int K' \frac{\cos(rn)}{\cos(rn')} d\sigma' .$$

Ora è facile vedere che si ha

$$\cos(rn) = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \left(\frac{x'-x}{r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y'-y}{r} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z'-z}{r} \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

$$\cos(rn') = \frac{1}{\sqrt{\Delta f'}} \left(\frac{x-x'}{r} \frac{df'}{\partial x'} + \frac{y-y'}{r} \frac{\partial f'}{\partial y'} + \frac{z-z'}{r} \frac{\partial f'}{\partial z'} \right);$$

ed è facile constatare immediatamente che nel caso nostro le espressioni dentro parentesi sono identiche, per cui si avrà

$$\frac{\cos(rn)}{\cos(rn')} = \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}},$$

e quindi

$$P_0 = -\int K' \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}} d\sigma' .$$

Ora se sulla normale nel punto (x, y, z) si considera un punto interno alla superficie infinitamente prossimo al punto potenziato a distanza ε da questo e si indica con $\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-\varepsilon}$ il valore della derivata della funzione potenziale secondo la normale positiva nel punto stesso, per un noto teorema [1] si avrà

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-\varepsilon} = P_0 + 2\pi K .$$

Inoltre da un altro teorema [2], che è una immediata conseguenza del teorema di Green, consegue che condizione necessaria e sufficiente perchè su tutta la superficie e nell'interno la funzione potenziale sia costante, è che nell'interno per tutti i punti infinitamente prossimi alla superficie si abbia

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-\varepsilon} = 0 ,$$

(1) B. Riemann, *Schwere, Elektricität und Magnetismus*. Hannover, 1876, pag. 50.

(2) G. Kirchhoff, *Vorlesungen über matematische Physik*. Leipzig, 1883; *Mechanik*, pag. 184.

la quale si traduce nell' altra

$$P_0 + 2\pi K = 0\,,$$

od anche

$$\int K' \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}}\, d\sigma' = 2\pi K\,.$$

Ora è facile osservare che questa relazione è soddisfatta se si pone

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}\,,\quad K = \frac{H}{\sqrt{\Delta f}}\,,$$

dove con H è denotata una costante qualunque.

Infatti con ciò la precedente relazione si trasforma nell' altra

$$\int d\sigma' = 2\pi\,,$$

la quale evidentemente è soddisfatta, giacchè l' integrazione si estende a metà dalla superficie sferica di raggio ugual uno.

Per l' esposizione del secondo metodo s' immagini descritta una sfera di raggio ϱ concentrica coll' ellissoide e tutta interna rispetto alla superficie del medesimo, e si indichino con $\varrho\,,\theta\,,\varphi$ le coordinate polari di un punto della superficie sferica rispetto al suo centro e con $\varrho', \theta', \varphi'$ le coordinate correnti di un punto della superficie dell' ellissoide. Dopo l' ipotesi fatta intorno alla posizione della sfera si avrà $\varrho < \varrho'$, qualunque sia ϱ'; per cui si potrà sviluppare la funzione potenziale dello strato ellissoidico per funzioni sferiche nel seguente modo:

$$V = \sum_0^\infty \varrho^n \int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{n+1}} K'\, ds'\,,$$

dove P_n rappresenta la nota funzione sferica, ed è

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varphi - \varphi')\,.$$

Se ora si considera la superficie sferica concentrica coll' ellissoide e di raggio uguale ad uno, e si denota con $d\sigma'$ l' elemento della sua superficie che corrisponde all' elemento della superficie ellissoidica e con $(\varrho' n')$ l' angolo acuto formato dalla direzione di ϱ' colla normale esterna, si avrà

$$ds' \cos(\varrho' n') = \varrho'^2\, d\sigma'\,,$$

ossia

$$ds' \left(\frac{x'}{\varrho'}\frac{\partial f'}{\partial x'} + \frac{y'}{\varrho'}\frac{\partial f'}{\partial y'} + \frac{z'}{\varrho'}\frac{\partial f'}{\partial z'}\right)\frac{1}{\sqrt{\Delta f'}} = \varrho'^2\, d\sigma'\,,$$

od anche

$$ds' \frac{2}{\varrho'\sqrt{\Delta f'}} = \varrho'^2\, d\sigma'\,,$$

ed infine

$$\frac{ds'}{\varrho'^3} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta f'}\, d\sigma' ;$$

per cui il precedente sviluppo di V si può cambiare nel seguente:

$$V = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \varrho^n \int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{n-2}} \sqrt{\Delta f'}\, K'\, d\sigma' .$$

Se ora si pone

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}, \qquad \text{(H costante)}$$

si avrà

$$V = \frac{H}{2}\sum_0^\infty \varrho^n \int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{n-2}}\, d\sigma' .$$

Ora per dimostrare che, dopo l'espressione assunta per la densità, V è costante su tutta la superficie dell'ellissoide, basterà far vedere che V è costante su tutta la superficie della sfera di raggio ϱ, giacchè dovrà di conseguenza essere costante per tutti i punti interni alla medesima e per un noto teorema di Gauss ([1]) dovrà essere pure costante in tutto l'interno e sulla superficie dell'ellissoide.

Osserviamo che il primo termine dello sviluppo precedente è

$$\frac{H}{2}\int \varrho'^2\, d\sigma' ,$$

ed è indipendente da $\varrho , \theta , \varphi$; e siccome V deve essere costante qualunque sia ϱ per quanto piccolo se deve esser costante sulla superficie dell'ellissoide, ne consegue che condizione necessaria e sufficiente perchè lo strato ellissoidico considerato sia equipotenziale, è che i singoli termini del precedente sviluppo ad eccezione del primo si annullino, vale a dire dovrà aversi

$$\int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{n-2}}\, d\sigma' = 0$$

per tutti i valori di n cominciando da uno.

Molto facilmente si vede che la relazione ora scritta ha luogo per n dispari, giacchè ad ogni elemento positivo dell'integrale ne corrisponde uno negativo di egual valore assoluto; per cui non ci resterà che a dimostrare che è

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\omega)}{\varrho'^{2n-2}}\, d\sigma' = 0$$

per tutti i valori di n cominciando da uno.

([1]) P. G. Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über die im umgekerten Verhältniss* ... ecc. *herausgegeben von Dr. F. Grube.* Leipzig, 1876, pag. 180.

Per $n = 1$ è facile dimostrare direttamente che si ha

$$\int P_2(\cos\omega)\, d\sigma' = 0.$$

Infatti assumendo come asse polare il raggio che va al punto potenziato sulla sfera di raggio ϱ, si potrà porre

$$d\sigma' = \operatorname{sen}\omega\, d\omega\, d\varphi';$$

per cui la precedente relazione si trasformerà nella seguente:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_2(\cos\omega) \operatorname{sen}\omega\, d\omega\, d\varphi' = 0.$$

Ora è facile dimostrare che si ha

$$P_2(\cos\omega) \operatorname{sen}\omega = -\frac{1}{8} \operatorname{sen}\omega + \frac{3}{8} \operatorname{sen} 3\omega,$$

e così pure è facile constatare colla diretta integrazione rispetto ad ω che si ha

$$\int_0^\pi P_2(\cos\omega) \operatorname{sen}\omega\, d\omega = 0;$$

donde consegue pure

$$\int P_2(\cos\omega)\, d\sigma' = 0.$$

La stessa relazione può esser dedotta anche come caso particolare dal teorema fondamentale relativo alle funzioni sferiche espresso dalla relazione

$$\int X_n Y_m\, d\sigma = 0,$$

dove X_n, Y_m rappresentano due funzioni sferiche qualunque di ordini differenti.

Infatti in omaggio a tal teorema si ha

$$\int P_0(\cos\omega)\, P_2(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

ed essendo

$$P_0(\cos\omega) = 1,$$

si avrà pure

$$\int P_2(\cos\omega)\, d\sigma' = 0.$$

Per dimostrare ora che si ha pure

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\omega)}{\varrho'^{2n-2}}\, d\sigma' = 0$$

qualunque sia n superiore ad uno, s' innalzi il primo membro dell' equazione dell' ellissoide alla potenza $n-1$. Con ciò si otterrà l' equazione

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1}=1,$$

cui dovranno soddisfare i punti della superficie del medesimo.

Ora è facile osservare che effettuando l' innalzamento a potenza si otterrà nel primo membro una funzione omogenea di grado $2n-2$ delle coordinate x, y, z; per cui, ponendo

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

per un teorema di Gauss (1) intorno alle funzioni omogenee, indicando con $\varphi(x, y, z)$ il primo membro, si potrà porre

$$\varphi(x, y, z)=Y^{(2n-2)}+r^2 Y^{(2n-4)}+\cdots+r^{2n-2} Y^{(0)},$$

dove le Y rappresentano funzioni omogenee delle coordinate dei gradi rispettivi

$$2n-2\ ,\ 2n-4, \ldots, 0,$$

le quali soddisfanno all' equazione

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=0.$$

Se ora si pone

$$x=r\cos\theta\ ,\ y=r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\ ,\ z=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,$$

si ottiene, sempre riferendoci al citato teorema di Gauss,

$$\varphi(x, y, z)=r^{2n-2}(X_{2n-2}+X_{2n-4}+\cdots+X_0),$$

dove le X rappresentano funzioni sferiche *pure* (denominazione usata da Gauss) degli ordini rappresentati dai rispettivi indici; per cui l' equazione cui devono soddisfare i punti della superficie ellissoidica si potrà anche scrivere:

$$\frac{1}{r^{2n-2}}=X_{2n-2}+X_{2n-4}+\cdots+X_0;$$

per cui pel punto di coordinate $\varrho', \theta', \varphi'$ si avrà

$$\frac{1}{\varrho'^{2n-2}}=X'_{2n-2}+X'_{2n-4}+\cdots+X'_0,$$

dove coll' apice abbiamo inteso di denotare i valori delle funzioni sferiche degli angoli θ', φ'.

(1) E. Heine, *Theorie der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen*. Berlin, 1878, vol. I, pag. 324.

Ora in conseguenza della precedente relazione si avrà

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\omega)}{\varrho'^{2n-2}}\, d\sigma' = \int (X'_{2n-2} + X'_{2n-4} + \cdots + X'_0)\, P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma',$$

ed è facile vedere che il secondo membro è nullo pel noto teorema

$$\int X'_m\, P_n(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

se X'_m è una funzione sferica di ordine m, ed è m differente da n.

Così resta adunque pienamente dimostrato anche col secondo metodo che

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}$$

è l'espressione della densità di uno strato ellissoidico equipotenziale.

Con considerazioni analoghe alle precedenti si può ora dedurre, per tutti i valori di ν da 1 fino ad n, la relazione più generale

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\omega)}{\varrho'^{2\nu-2}}\, d\sigma' = 0$$

dalla quale si possono facilmente ottenere i teoremi cui ho accennato in principio.

Dall'equazione dell'ellissoide si deduce immediatamente

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2\theta'}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta' \cos^2\varphi'}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen}^2\varphi'}{c^2};$$

per cui la precedente relazione si potrà anche scrivere

$$\int \left(\frac{\cos^2\theta'}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta' \cos^2\varphi'}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen}^2\varphi'}{c^2}\right)^{\nu-1} P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0.$$

Se ora in quest'ultima relazione si fanno successivamente infinitamente grandi b e c, a e c, a e b, si ottengono le tre relazioni

$$\int \cos^{2\nu-2}\theta'\, P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

$$\int \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta' \cos^{2\nu-2}\varphi'\, P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

$$\int \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta' \operatorname{sen}^{2\nu-2}\varphi'\, P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

le quali possono esser considerate come generalizzazioni di un teorema di Legendre [1].

[1] E. Heine, op. cit., vol. I, pag. 73.

Tutte le integrazioni che compariscono nel secondo metodo si estendono, come è stato sempre sottinteso, all' intera superficie di raggio uguale ad uno; per cui le precedenti relazioni si possono anche scrivere nel seguente modo:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2\nu-2}\theta' \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\varphi' = 0 ,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta' \cos^{2\nu-2}\varphi' \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\varphi' = 0 ,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta' \operatorname{sen}^{2\nu-2}\varphi' \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\varphi' = 0 .$$

Mi auguro che i due metodi esposti possano esser applicati in altri casi, e che questi ultimi teoremi possano ottenere per altra via ulteriori generalizzazioni.

Chimica fisica. — *Sui fenomeni di equilibrio fisico nelle miscele di sostanze isomorfe* [1]. Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio Giacomo Ciamician.

Nonostante i molti studî teorici, e le molte ricerche sperimentali eseguite negli ultimi anni intorno alle soluzioni solide, vi sono ancora in questo campo alcuni punti, intorno ai quali rimane una certa oscurità. Merita fra essi uno speciale interesse il caso in cui due sostanze, essendo perfettamente isomorfe o quasi, posseggono la capacità di sciogliersi reciprocamente allo stato solido in tutte le proporzioni.

Le cognizioni intorno ai fenomeni che avvengono nel congelamento delle miscele di tali sostanze ci provengono principalmente da una serie di lavori di F. W. Küster [2]. Le conclusioni di tali lavori riguardano specialmente due ordini di fatti: l' andamento del punto di congelamento in funzione della composizione della miscela liquida; ed il rapporto secondo il quale i componenti si distribuiscono fra le due fasi liquida e solida. Riguardo al primo punto Küster enunciò la regola che — se si rappresenta in un sistema di assi coordinati sulle ascisse le concentrazioni e sulle ordinate la temperatura — *la curva dei punti di congelamento coincide colla retta che unisce i punti di congelamento dei due componenti*. Quanto al cofficiente di distribuzione dei componenti fra le due fasi, Küster emise il principio che per sostanze perfettamente isomorfe, la miscela isomorfa che si separa debba avere la stessa composizione della liquida. Anzi da questo comportamento (il quale non sa-

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

[2] Zeitschr. f. Phys. Chemie, V, 601 (1890); VIII, 584 (1891); XII, 508 (1893); XVI, 525 (1895); XVII, 357 (1895).

rebbe in accordo colla teoria di van't Hoff), egli credette di dover concludere che le miscele isomorfe non fossero soluzioni solide ([1]). Küster abbandonò però più tardi tale concetto ([2]).

A queste conclusioni le quali vennero accolte dai più autorevoli scrittori di chimica fisica nei loro trattati ([3]) si possono a parer mio rivolgere diverse e non lievi obbiezioni. Io ho perciò stimato non inutile il portare un nuovo contributo, sia di considerazioni teoriche, che di nuove esperienze allo studio di questo importante problema.

I. *La curva di congelamento.*

Alla regola enunciata da Küster fu subito mossa da Garelli una seria obiezione ([4]). Questo autore osservò che tale regola può trovarsi in contraddizione con la teoria generale di van 't Hoff sulle soluzioni solide. Infatti se si immaginano due sostanze isomorfe con punti di congelamento assai diversi, potrebbe accadere che, sciogliendo quello che congela a temperatura più bassa nell' altro, se la miscela seguisse la regola di Küster, si avesse una depressione molecolare più forte di quella che sarebbe normale pel corpo a temperatura di congelamento più elevata che qui funziona da solvente. Questo fatto non potrebbe in alcun modo accordarsi colla teoria di van 't Hoff. Perciò Garelli sperimentò su soluzioni di fenantrene in antracene ed in carbazolo coi quali è isomorfo, e di cui fonde più basso di oltre 100 gradi. Se queste miscele seguissero esattamente la regola di Küster, si avrebbero delle depressioni maggiori di quelle normali, per l' antracene ed il carbazolo assunti come solventi. Invece dalle esperienze risultò che si hanno depressioni sempre assai inferiori a quelle calcolate colla regola di Küster, ed alquanto inferiori altresì a quelle normali. Del resto, prescindendo anche da questi casi-limiti, possiamo osservare nel comportamento di tutte le miscele isomorfe un andamento generale.

Quando la differenza fra le temperature di congelamento dei due componenti è abbastanza grande, la curva di congelamento si trova tutta al disopra della retta, colla quale dovrebbe coincidere secondo la regola di Küster; e se ne allontana tanto più quanto è maggiore tale differenza; col diminuire di questa la curva tende a coincidere colla retta; e quando la differenza è

([1]) Zeitschr. f. Phys. Chemie, XIII, 446, nota (1894).

([2]) Zeitschr. f. Phys. Chemie, XVII, 357 (1895).

([3]) Ostwald, Allgemeine Chemie; 2 aufl., 1891, I Band, pag. 1028; Nernst, Theoretische Chemie, 1893, pag. 111; Van 't Hoff, Vorlesungen ü. theor. u. Phys. Chemie, 1 Heft, 1898, pag. 50.

([4]) Gazz. chim. ital., 1894, II, 263.

piccola la curva si trova tutta al disotto della retta allontanandosene tanto più, quanto più si accostano le due temperature estreme. Ciò risulta evidente dalla seguente tabella in cui sono raccolti i risultati delle determinazioni di Küster e di Garelli:

COMPONENTI DELLA MISCELA	Differenze fra le temperature di congelam.	Andamento della curva di congelamento
Carbazolo e fenantrene	140°.0	Molto al disopra della retta.
Antracene e fenantrene	117°.0	
Naftalina e diidronaftalina	56°.09	Alquanto al disopra della retta
Aldeide monobromocinnamica e aldeide monoclorocinnamica	38°.31	
Naftalina e β. naftolo	39°.73	Alquanto al disotto della retta
Carbazolo ed antracene	23°.0	
Tricloroacetamide e tribromoacetamide	19°.36	
Pentacloromonobromo.α.keto.γ.R.pentene ed esacloro.α.keto.γ.R.pentene . . .	10°.21	
Bromonitrobenzolo e cloronitrobenzolo .	8°.90	
Diacetilmonobromo idrochinone e diacetilmonocloroidrochinone	1°.84	Molto al disotto della retta

Specialmente degna di nota si presenta qui la miscela di naftalina e β-naftolo. Essa infatti verifica quasi perfettamente la regola di Küster, e la differenza fra le temperature di congelamento dei due componenti è abbastanza notevole. Era quindi interessante l'esaminare il comportamento delle soluzioni diluite di naftalina in β-naftolo [1] per vedere se anche a queste basse concentrazioni si verificasse la regola di Küster, ed il rapporto in cui queste depressioni stanno con quelle causate nel β-naftolo da sostanze con esso non isomorfe. Era perciò necessario determinare la depressione molecolare del β-naftolo usato come solvente. Io ho fatto questo sciogliendo in esso diverse sostanze di varia funzione chimica ed il cui comportamento fosse presumibilmente normale. Come tali usai il difenile, l'acetanilide, la benzammide, l'acido benzoico, e l'acido salicilico.

Come media generale di tali misure, che verranno esposte dettagliatamente altrove, risulta per la depressione molecolare costante del β-naftolo il

[1] La soluzione più diluita esaminata da Küster conteneva circa il 10 % di naftalina.

valore K = 112.5. Per le soluzioni diluite di naftalina in β-naftolo si ebberó invece i seguenti risultati:

Naftalina		Abbassamento termometrico		Depressione molecolare	Peso molecolare (K = 112.5)
su 100 grammi di β. naftolo grammi	su 100 molecole di miscela molecole	calcolato secondo Küster	trovato		
					$C_{10}H_8$ = 128
0.5271	0.5895	0°.23.5	0°.22.5	54.6	264
0.8344	0.9300	0°.37	0°.36	55.2	261
1.1266	1.2472	0°.49.5	0°.48.5	55.3	260
1.6085	1.7774	0°.70.5	0°.69.5	55.3	260
1.9983	2.1986	0°.87.5	0°.86.5	55.4	260
2.4420	2.6739	1°.06	1°.06	55.6	259
3.2151	3.4911	1°.38.5	1°.41	56.1	257
5.7879	6.1131	2°.43	2°.56	56.6	254

Risulta quindi che le depressioni molecolari sono circa metà di quelle normali. Il comportamento delle miscele di naftalina e di β-naftolo è quindi in accordo tanto colla regola di Küster, quanto colla teoria di van 't Hoff. Quando però la regola di Küster prevederebbe risultati in contraddizione con quelli previsti dalla teoria di van 't Hoff essa non si verifica più; e le deviazioni sono di tal ordine di grandezza da non essere attribuibili ad errore d'osservazione [1]. Tali deviazioni sarebbero però secondo Küster da attribuirsi al non perfetto isomorfismo delle due sostanze. Per sostanze perfettamente isomorfe, essa dovrebbe secondo questo autore verificarsi perfettamente.

Siccome però la regola di Küster non ricevette sinora dimostrazioni teoriche, io mi sono studiato di ricercare ciò che su questo argomento può dedursi dalle leggi generali. Singolarmente adatta a risolvere tali problemi è la *regola della fase* di Willard Gibbs [2]. Cerchiamo di applicarla al caso nostro.

Nel caso delle miscele binarie di sostanze non isomorfe si hanno — usando le solite rappresentazioni grafiche — le due curve di congelamento secondo che si parte dall'uno o dall'altro dei due componenti. Queste curve sono il luogo di coesistenza di 3 fasi: la soluzione liquida, uno dei due componenti allo stato solido, il vapore. Esse, rappresentando sistemi di $n+1$ fasi per $n=2$ sostanze, sono sede di quello che Gibbs chiama equilibrio eterogeneo completo. Nell'incontro di queste due curve si ha un punto quadruplo

[1] Per le miscele di fenantrene ed antracene la deviazione massima è di 15°,39; per quelle di fenantrene e carbazolo di 28°,39.

[2] J. W. Gibds, *Thermodinamische Studien*. Leipzig, 1892; vedi anche W. Meyerhoffer, *Die Phasenregel*. Leipzig, u. Wien, 1893.

(crioidratico) in cui coesistono $n+2=4$ fasi, cioè: i due componenti solidi, la soluzione liquida ed il vapore. Quando le due sostanze abbiano facoltà di sciogliersi limitatamente allo stato solido, si avranno pure le due curve distinte come nel caso precedente, e nel loro incontro un punto quadruplo, poichè anche in questo caso possono coesistere 4 fasi: le due soluzioni solide rispettivamente sature, la soluzione liquida, ed il vapore. Ma quando — come nel caso che noi consideriamo — la solubilità allo stato solido è completa non possono più coesistere che $3=n+1$ fasi: la miscela isomorfa solida, la soluzione liquida ed il vapore. Quindi secondo la regola della fase non si avrà più che una curva sola decorrente in modo continuo fra le temperature di congelamento dei due componenti. Questo fatto prevedibile teoricamente risponde perfettamente all' esperienza.

Da queste considerazioni risulta pure evidente la non ammissibilità dei concetti di Ambronn e Le Blanc [1] sulla natura delle miscele isomorfe. Questi autori avevano creduto di dover dedurre da osservazioni sui coefficienti di rifrazione di cristalli misti di sali isomorfi, che questi siano miscele meccaniche e non soluzioni solide. L'erroneità di queste vedute fu però già sufficientemente dimostrata da Brauns [2], Küster [3], e Bovländer [4].

La regola della fase però non dice nulla sulla forma della curva di congelamento delle miscele isomorfe.

Da quanto ho detto risulta che la regola di Küster che tale curva per sostanze perfettamente isomorfe coincida colla retta congiungente le temperature di congelamento dei due componenti non è provata teoricamente; essa farebbe anzi in taluni casi prevedere risultati in contraddizione colla teoria generale di van 't Hoff; ma in tali casi i risultati sperimentali deviano da essa almeno tanto da restare in accordo colla teoria di van 't Hoff. A mio parere questa regola di Küster deve quindi modificarsi così: *Le temperature di congelamento delle miscele di due sostanze isomorfe variano in modo continuo fra le temperature di congelamento dei due componenti.*

In ulteriore lavoro mostrerò come considerazioni analoghe possano farsi per il comportamento delle miscele di tre componenti, due dei quali siano fra di loro isomorfi.

II. *Il coefficiente di distribuzione.*

Anche alle vedute di Küster sopra questo argomento possono essere rivolte serie obiezioni. Anzitutto il principio da lui esposto non venne mai

(1) Ber. d. math. phys. Klasse d. Gesellsch. f. Wiss. v. Sachsen. 1894, 17; Zeitschr. f. Phys. Chemie XXII, 121 (1897).

(2) Jahrbuch für Mineralogie, 1896.

(3) Zeitschr. f. Phys. Chemie, XVI, 525 (1895).

(4) Chem. Centralblatt, 1895, I, 870. Nota ad un sunto del suindicato lavoro di Küster.

verificato sperimentalmente in modo rigoroso. Solo per le miscele di esacloro- e pentacloro.monobromo-α.keto.γ.R.pentene egli dedusse l'uguaglianza fra la composizione della soluzione solida e della soluzione liquida dalle piccolissime variazioni della temperatura durante il congelamento ([1]). Però per molte delle miscele isomorfe più sopra enumerate Küster constatò che nei cristalli separati domina quello dei due componenti che congela a temperatura più elevata, e ciò in modo tanto più spiccato quanto maggiore è la differenza fra le temperature di congelamento dei due componenti ([2]). Ciò risulta anche meglio dalle esperienze di Garelli ([3]) il quale dimostrò in modo certo per quanto approssimativo che dalle miscele di carbazolo (p. di fus. 236°) e di fenantrene (p. di fus. 96°) si separa una soluzione solida più concentrata in carbazolo della liquida. Però Küster attribuisce anche questi fatti (che sono tuttavia in perfetto accordo colla teoria di van 't Hoff) al non essere le due sostanze perfettamente isomorfe. In quest' ultimo caso dovrebbe secondo questo autore ([4]) separarsi una miscela solida dell'identica composizione della liquida. Anche qui meritano uno speciale interesse le miscele di naftalina e di β-naftolo; poichè, come dissi di sopra, esse, accanto ad una notevole differenza fra le temperature di congelamento dei componenti, presentano la quasi perfetta coincidenza colla prima regola di Küster. Da esperienze di A. van Bijlert ([5]) risulterebbe che si separa in questo come in tutti i casi analoghi una soluzione solida più concentrata in β-naftolo della liquida. Secondo Küster ([6]) però le determinazioni di van Bijlert sono inattendibili ed egli, dalla quasi perfetta coincidenza della curva di congelamento colla retta congiungente le temperature di congelamento dei due componenti, ritiene senz' altro come provato che la miscela solida che si separa abbia la stessa composizione della liquida, o, come egli si esprime, che la cristallizzazione della miscela sia omogenea. Egli assume anzi questa ipotesi come base fondamentale necessaria di un suo lavoro sopra lo stato molecolare dei corpi nelle soluzioni solide. Nonostante che le critiche di Küster ai metodi sperimentali di van Bijlert debbano riconoscersi giustificate, mi sembrava per le idee già esposte difficile ammettere questa omogeneità di cristallizzazione. Volli quindi eseguire alcune esperienze dirette a chiarire questo punto; e come mezzo d' analisi più pronto e sicuro adottai secondo le indicazioni di Küster il termometro. Infatti l'omogeneità della cristallizzazione sarebbe caratterizzata dalla costanza della temperatura durante il congelamento.

([1]) Zeitschr. f. Phys. Chemie, V, 601 (1890).
([2]) Zeitschr. f. Phys. Chemie, VIII, 584 (1891).
([3]) Gazz. chim. ital., 1893, I, 448.
([4]) Zeitschr. f. Phys. Chemie, XII, 508 (1893).
([5]) Zeitschr. f. Phys. Chemie, VIII, 362 (1891).
([6]) Zeitschr. f. Phys. Chemie, XVII, 357 (1895).

Anzitutto esaminai l' andamento del termometro durante il congelamento di varie miscele di naftalina e di β-naftolo. Partendo da soluzioni di qualunque concentrazione la temperatura durante il congelamento diminuisce continuamente. Tali diminuzioni di temperatura sono di tal ordine di grandezza da escludere che siano dovute ad impurezza; per soluzioni contenenti circa il 50 °/₀ d' ogni componente si osservano abbassamenti di oltre due gradi. Ciò indica già in modo certo la separazione di una soluzione solida più concentrata in β-naftolo di quella liquida.

Eseguii però ancora alcune esperienze nel seguente modo. Preparata una miscela liquida di naftalina e di β-naftolo ne determinavo la temperatura di congelamento, e quindi col noto apparecchio separavo i cristalli dall' acqua madre. Separate le due porzioni determinavo la temperatura di congelamento d' entrambe. Come si vede dai risultati più sotto esposti, i cristalli separati mostravano sempre una temperatura di congelamento assai più elevata della soluzione primitiva ed erano quindi più ricchi in β-naftolo; la soluzione rimasta liquida aveva invece un punto di congelamento assai più basso, ed era quindi più povera in β-naftolo. La tabella seguente rende conto del risultato di queste esperienze. In essa la concentrazione della miscela primitiva è espressa dal numero delle molecole di naftalina su 100 molecole di miscela. Le temperature vennero determinate con un termometro di Beckmann diviso in $^1/_{10}$ di grado, ed i numeri indicati sono riferiti (come usa Küster) alla scala arbitraria di questo termometro.

ESPERIENZA	Concentrazione della miscela primitiva	Temperatura di congelamento		
		della miscela primitiva	della miscela finale	dei cristalli separati
I	30.45	31.25	30.85	32.00
II	42.02	35.65	35.15	36.45
III	43.15	36.10	35.60	36.95
IV	52.26	39.80	39.10	40.75

Da queste esperienze risulta dunque che anche quando la curva di congelamento delle miscele isomorfe coincida colla retta congiungente le temperature di congelamento dei due componenti, si separano (contrariamente al concetto di Küster) soluzioni solide più concentrate delle liquide rispetto a quello dei due componenti che congela a temperatura più elevata.

Oltre a questo fatto di indole sperimentale possono portarsi contro il principio di Küster anche argomenti teoretici. E. Beckmann (¹) ha recente-

(¹) Zeitschr. f. Phys. Ch., XXII, 612 (1897).

mente enunciato la seguente formola che esprime i fenomeni che intervengono nella separazione di una soluzione solida: $m = \frac{C_l - C_s}{\Delta} K$, dove sono: m il peso molecolare del corpo sciolto, C_l e C_s rispettivamente le concentrazioni delle soluzioni liquida e solida, Δ l'abbassamento di temperatura, e K la depressione molecolare costante del solvente. Per quanto questa formola non sia rigorosamente esatta, essa può tuttavia applicarsi alle soluzioni diluite con approssimazione più che sufficiente. Infatti tale formola può impiegarsi con grande approssimazione a calcolare i pesi molecolari nel caso della formazione di soluzioni solide, come venne dimostrato da Beckmann (l. c.), e poscia ripetutamente da me [1]. Possiamo ora sostituire a K il valore $0.02 \frac{T^2}{w}$ e porre l'equazione sotto la forma:

$$C_l - C_s = \frac{m \Delta w}{0.02\, T^2}.$$

Ora secondo Küster dovrebbe nel caso delle miscele isomorfe essere $C_l = C_s$. In tal caso dovrebbe annullarsi il valore $\frac{m \Delta w}{0.02\, T^2}$. Ma poichè m peso molecolare della sostanza sciolta, T e w temperatura assoluta di fusione, e calore latente di fusione del solvente sono quantità essenzialmente positive e finite, questa condizione può verificarsi solo quando sia $\Delta = 0$, cioè: *perchè la soluzione liquida e quella solida abbiano la stessa concentrazione, la temperatura di congelamento di uno dei due componenti non deve alterarsi per aggiunta dell'altro.* Secondo che sia Δ positivo o negativo; ossia secondo che si parta nel considerare i fenomeni dal componente che ha temperatura di congelamento più elevata, o viceversa sarà $C_l > C_s$, oppure $C_s > C_l$. Queste deduzioni sono, come si è visto più sopra, perfettamente confermate dall'esperienza. Infatti Küster trovò la quasi completa identità di composizione fra le fasi solida e liquida in casi in cui la differenza fra le temperature di congelamento dei due componenti era piccolissima. (Vedi sopra).

Concludendo: *tanto per l'andamento delle temperature di congelamento, quanto pel coefficiente di distribuzione dei due componenti fra le fasi liquida e solida, le miscele isomorfe seguono sempre completamente la teoria generale di van 't Hoff sulle soluzioni solide.*

[1] Rendiconti di questa Accademia, 1898, 1° sem., pag. 170; Gazz. chim. ital., 1898, I, 250, 267.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
dall' 8 agosto al 4 settembre 1898.

Catalogo della Biblioteca dell'Ufficio Geologico. 2° Supplem. Roma, 1898. 8°.

Catalogo della mostra del Corpo delle Miniere all' Esposizione generale italiana del 1898 in Torino. Roma, 1898. 4°.

Chyzer C. e *Kulczynsky L.* — Araneae Hungariae secundum collectiones a Leone Becker pro parte perscrutatas conscriptae. Tomi II[i] pars posterior. Budapestini, 1897. 4°.

Haffkine W. M. — A conversazione on the preventive inoculation against plague. Calcutta, 1898. 8°.

Id. — Experiment on the effect of protective inoculation in the epidemic of plague at Undhera, Taluka Baroda, february and march 1898. Calcutta, 1898. 4°.

Id. — Joint Report on the epidemic of plague in Lower Damaun (Portuguese India) and on the effect of preventive inoculation there.

Id. — Report on the preventive inoculations against plague in the Khoja Community of Bombay, during the epidemic of 1897-98.

Montano G. — *Bacillus graminearum.* Osservazioni e ricerche. Melfi, 1898. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 18 settembre 1898

Matematica. — *Sull' applicabilità di due spazî colla medesima curvatura di Riemann costante.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

Nella celebre Memoria *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Riemann, dopo avere stabilita la nozione di *curvatura* di uno spazio ad n dimensioni relativamente ad un dato punto e ad un' assegnata orientazione di un elemento superficiale attorno al punto, definisce gli spazî a curvatura costante come quelli pei quali la curvatura serba sempre lo stesso valore K_0, cangiando comunque il punto e l' orientazione dell' elemento superficiale attorno ad esso. L' elemento lineare ds di uno spazio a curvatura costante può sempre ridursi, secondo un' asserzione di Riemann, ad una forma tipica determinata e dipendente soltanto dal valore costante K_0 della curvatura, p. e. alla forma canonica:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{\left\{1 + \frac{K_0}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\right\}^2}.$$

Enunciato sotto altra forma, questo teorema ci dice che due spazî dello stesso numero di dimensioni e colla medesima curvatura costante sono applicabili l' uno sull' altro. Ciò vale in particolare di due regioni qualunque del medesimo spazio a curvatura costante, sicchè negli spazî di questa natura vige il principio della *perfetta* trasportabilità delle figure. Di questo teorema fondamentale Lipschitz per il primo diede una dimostrazione nelle sue ricerche sulle forme differenziali quadratiche.

Le pagine seguenti hanno per iscopo di far conoscere pel citato teorema una dimostrazione che sembra nuova e notevole per la sua semplicità [1].

1. *Caso della curvatura nulla.* — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma differenziale quadratica

$$(1) \qquad \sum_{i,k}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

che supponiamo definita positiva, dia il quadrato dell' elemento lineare di uno spazio a curvatura costante K_0, sono espresse, secondo la formola Riemanniana per la curvatura, dalle equazioni seguenti [2]:

$$(2) \qquad (ik\,,jl)_a = K_0\,(a_{ij}\, a_{kl} - a_{il}\, a_{kj})\,,$$

che debbono sussistere per tutti i valori da 1 ad n degli indici $i\,,k\,,j\,,l$, l'apposizione dell' indice a ai simboli a quattro indici $(ik\,,jl)$ di Riemann-Christoffel denotando che essi sono costruiti per la forma (1) coi coefficienti a_{ik}. È utile pel seguito dare alle condizioni (2), coll' introduzione dei simboli di Christoffel a quattro indici di 2ª specie [3], la forma equivalente:

$$(2^*) \qquad \begin{cases} \{ik\,,jl\}_a = 0 \qquad \text{per } k \neq \begin{cases} j \\ l \end{cases} \\ \{il\,,jl\} = K_0\, a_{ij}\,. \end{cases}$$

Comincieremo dal dimostrare il teorema enunciato nel caso $K_0 = 0$, cioè stabiliremo la proprietà che: *Se lo spazio di elemento lineare*

$$(3) \qquad ds^2 = \sum_{i,k}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è a curvatura nulla, si può con una trasformazione reale di variabili ridurne l'elemento lineare alla forma tipica

$$(4) \qquad ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2 \ \text{[4]}.$$

Perchè le due forme differenziali (3), (4) siano equivalenti è necessario, secondo le formole di Christoffel [5], che ciascuna y, considerata come fun-

[1] La dimostrazione che qui pubblico è stata da me data in un corso di lezioni dell' anno 1894-95 all' Università di Pisa e fa parte dei capitoli aggiunti, e non ancora pubblicati, all' edizione tedesca delle mie *Lezioni di geometria differenziale.*

[2] Vedi Lipschitz, Crelle's Journal, 72.

[3] Cf. il cap. II delle mie *Lezioni* ecc.

[4] Nel caso della curvatura nulla, la dimostrazione è in sostanza ben nota, ma qui si riporta per dare una trattazione completa.

[5] *Lezioni,* pag. 42.

zione delle x, soddisfi il sistema delle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni simultanee:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_l^{1\dots n} \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_a \frac{\partial y}{\partial x_l} \cdot$$

Queste, essendo nel caso attuale nulli tutti i simboli a quattro indici

$$\{ik, jl\}_a ,$$

formano un sistema *illimitatamente integrabile*, talchè per definire una soluzione y del sistema (I) possono assegnarsi ad arbitrio in un punto $(x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ dello spazio i valori che debbono assumervi la y stessa e le sue n derivate prime. Ora se y_r, y_s sono due soluzioni, distinte o coincidenti del sistema (I) si trova subito che si ha [1]

$$\nabla(y_r, y_s) = \sum_{i,k}^{1\dots n} A_{ik} \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} = \text{cost.}$$

e potremo quindi assumere n integrali

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

tali che sia

$$\nabla(y_r, y_s) = 0 \qquad \text{per } r \neq s$$
$$\nabla(y_r, y_r) = \Delta_1 y_r = 1 .$$

Dopo ciò se trasformiamo la forma differenziale (3) dalle variabili x nelle y, che sono fra loro indipendenti [2] e chiamiamo

$$\sum_{i,k}^{1\dots n} b_{ik}\, dy_i\, dy_k$$

la forma trasformata, avremo

$$B_{rs} = 0 \quad \text{per } r \neq s , \quad B_{rr} = 1 ,$$

[1] Formando invero la derivata rispetto ad una qualunque x_i del parametro differenziale misto $\nabla(y_r, y_s)$ si trova per le (I)

$$\frac{\partial \nabla(y_r, y_s)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n) .$$

[2] Se fra $y_1, y_2, \dots y_n$ sussistesse una relazione

$$F(y_1, y_2, \dots y_n) = 0$$

dovremmo avere

$$\Delta_1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n}\right)^2 = 0 ,$$

ciò che è assurdo.

quindi anche

$$b_{rs} = 0 \quad \text{per } r \neq s\,, \quad b_{rr} = 1$$

e però

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$$

come si voleva.

2. *Forma parabolica dell' elemento lineare di uno spazio pseudosferico.* — Nel caso che la curvatura dello spazio sia una costante K_0 non nulla potremo adoperare un procedimento analogo al precedente, fondandoci sull' osservazione, dovuta a Weingarten [1], che in tal caso il sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni simultanee per una funzione incognita U:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_l \left\{ {ik \atop l} \right\}_a \frac{\partial U}{\partial x_l} - K_0\, a_{ik} U$$

è completamente integrabile. Invero le condizioni di illimitata integrabilità si riducono appunto alle (2*) che si suppongono soddisfatte [2]. Per definire una soluzione U di questo sistema potremo dunque assegnare ad arbitrio, in un punto dello spazio, i valori che vi assumono U e le sue n derivate prime. Ora se U, V sono due soluzioni di questo sistema si ha identicamente

$$\text{(5)} \qquad \nabla(U\,, V) + K_0\, UV = \text{cost.}\,,$$

come ci accertiamo con calcolo analogo a quello indicato in nota al numero precedente. In particolare si avrà

$$\text{(6)} \qquad \Delta_1 U + K_0\, U^2 = \text{cost.}$$

Ne segue, essendo $\Delta_1 U$ funzione di U, che le ipersuperficie $U = \text{cost.}$ sono geodeticamente parallele; di più dimostreremo fra breve che sono esse stesse spazî a $n-1$ dimensioni di curvatura costante.

Supponiamo dapprima che sia K_0 negativa e poniamo

$$K_0 = -\frac{1}{R^2}\,.$$

Disponendo dei valori iniziali di U e delle derivate, potremo rendere nulla la costante del secondo membro nella (6), cioè

$$\text{(7)} \qquad \Delta_1 U = \frac{U^2}{R^2}\,.$$

[1] Crelle's Journal, Bd. 94. Vedi la nota a pag. 197.

[2] Si osservi che coi simboli delle derivate seconde covarianti (*Lezioni*, cap. II), il sistema (II) si scrive

$$U_{ik} = -K_0\, a_{ik} U\,,$$

ciò che ne pone in evidenza il carattere invariantivo.

Ciò posto, assumiamo per ipersuperficie coordinate $x_1 = \text{cost.}$ precisamente le $U = \text{cost.}$, sicchè sarà

$$U = f(x_1),$$

e per linee coordinate (x_1) prendiamo le loro traiettorie ortogonali (geodetiche), fissando che il parametro x_1 sia l'arco di queste geodetiche contato a partire da un'ipersuperficie iniziale $U = \text{cost.}$ L'elemento lineare dello spazio assumerà allora la nota forma geodetica

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum_{i,k}^{2\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k .$$

Scrivendo ora che $U = f(x_1)$ soddisfa, rispetto a quest'ultima forma differenziale, le equazioni (II), coll'osservare che nel caso attuale abbiamo

$$\left\{\begin{array}{l} A_{11} = 1 \ , \ A_{1i} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots n) \\ \left\{ {ik \atop 1} \right\}_a = \left[{ik \atop 1} \right]_a = -\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} , \end{array}\right.$$

troviamo che si deve avere

$$f''(x_1) = \frac{f(x_1)}{R^2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} = \frac{2}{R^2} a_{ik} \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} . \tag{9}$$

Integrando la (8) otteniamo

$$f(x_1) = c e^{\frac{x_1}{R}} + c' e^{-\frac{x_1}{R}} ,$$

dove però, a causa della (7), una delle due costanti c, c' deve essere nulla. Possiamo dunque fare senz'altro

$$f(x_1) = e^{\frac{x_1}{R}} ,$$

dopo di che le (9) ci danno

$$a_{ik} = e^{\frac{2x_1}{R}} . b_{ik} ,$$

essendo le b_{ik} funzioni di $x_2, x_3, \dots x_n$ soltanto, ed abbiamo dunque per l'elemento lineare:

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} . \sum_{i,k}^{2\dots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k . \tag{10}$$

Calcoliamo ora per la forma differenziale

$$(11) \qquad \sum_{i,k}^{2\dots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

i simboli a quattro indici

$$(rk\,,ih)_b\,.$$

Dalla formola ([1])

$$(12) \quad (rk\,,ih)_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{rh}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_r\,\partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{ri}}{\partial x_h\,\partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_r\,\partial x_i}\right) +$$

$$+\sum_{l,m}^{1\dots n} A_{l,m}\left(\begin{bmatrix} rh \\ m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ l\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ri \\ m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ l\end{bmatrix}\right),$$

ponendo da sè i termini corrispondenti ai valori 1 degli indici l, m coll'osservare che per la (10)

$$A_{11} = 1 \ ,\ A_{1i} = 0 \quad \text{per } i > 1\,,$$

otteniamo

$$(rk\,,ih)_a - e^{\frac{2x_1}{R}}(rk\,,ih)_b = \frac{e^{\frac{4x_1}{R}}}{R^2}(b_{rh}\,b_{ik} - l_{ri}\,l_{hk})\,.$$

D' altronde, essendo lo spazio a n dimensioni corrispondente all' elemento lineare (10) di curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$, si ha per le (2)

$$(rk\,,ih)_a = \frac{e^{\frac{4x_1}{R}}}{R^2}(b_{rh}\,b_{ik} - b_{ri}\,b_{hk}),$$

onde risulta

$$(rk\,,ih)_b = 0\,.$$

Gli spazî a $n-1$ dimensioni $x_1 =$ cost. sono dunque a curvatura nulla e in conseguenza (n. 1) la forma differenziale (11) può ridursi alla forma canonica

$$dy_2^2 + dy_3^2 + \cdots + dy_n^2\,.$$

La (10) diventa quindi

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}}(dy_2^2 + dy_3^2 + \cdots + dy_n^2)\,,$$

che ponendo

$$e^{\frac{x_1}{R}} = \frac{R}{y_1}$$

[1] *Lezioni*, pag. 49.

può anche scriversi

$$(13) \qquad ds^2 = R^2 \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2}{y_1^2}.$$

Abbiamo così dimostrato il teorema: *L' elemento lineare di ogni spazio a n dimensioni a curvatura costante negativa* $-\frac{1}{R^2}$ *può ridursi alla forma tipica* (13).

Si può osservare che per effettuare tale riduzione basta integrare il sistema completo (II), ciò che equivale, secondo Meyer, ad integrare un sistema canonico di $n+1$ equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine.

3. *Forma ellittica ed iperbolica dell' elemento lineare di uno spazio pseudosferico.* — Se colle considerazioni del numero precedente il teorema concernente l' applicabilità di due spazî colla medesima curvatura costante negativa è già dimostrato, non è fuor di luogo il ricercare quali risultati si ottengono per le forme tipiche dell' elemento lineare di uno spazio pseudosferico, facendo uso di altre soluzioni del sistema (II) per le quali la costante che eguaglia l' espressione

$$\Delta_1 U - \frac{U^2}{R^2}$$

non sia nulla. Si hanno due casi essenzialmente distinti secondo che questa costante è positiva o negativa e, senza alterare la generalità, potremo fare nel primo caso

$$f(x_1) = \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{R}\right),$$

nel secondo invece

$$f(x_1) = \cosh\left(\frac{x_1}{R}\right).$$

Procedendo come al n. 2, si otterranno rispettivamente per l' elemento lineare dello spazio pseudosferico le forme seguenti:

$$a) \qquad ds^2 = dx_1^2 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \cdot \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

$$b) \qquad ds^2 = dx_1^2 + \cosh^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \cdot \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

in ambedue i casi essendo le b_{ik} funzioni soltanto di $x_2, x_3, \ldots x_n$. Dalla formola (12) del numero precedente si trae ora:

$$(rk, ih)_b = \frac{1}{R^2}(b_{ri}\, b_{hk} - b_{rh}\, b_{ik}) \quad \text{nel caso } a)$$

$$(rk, ih)_b = -\frac{1}{R^2}(b_{ri}\, b_{hk} - b_{rh}\, b_{ik}) \quad \text{nel caso } b),$$

onde vediamo che le ipersuperficie $x_1 = \text{cost.}$ sono spazî a $n-1$ dimensioni di curvatura costante, positiva nel caso a), negativa nel caso b).

Osserviamo di più che nel primo caso le geodetiche (x_1) escono da un medesimo punto a distanza finita dello spazio, dal punto che corrisponde al valore $x_1 = 0$; nel secondo caso poi l'ipersuperficie $x_1 = 0$ è un'ipersuperficie geodetica, ogni geodetica dell'ipersuperficie essendo altresì geodetica dello spazio ambiente, sicchè le geodetiche (x_1) possono allora considerarsi come uscenti da un punto comune *ideale* dello spazio. In fine nella forma tipica (13) del numero precedente le geodetiche (y_1) escono da un punto comune all'infinito, cioè sono parallele nel senso non-euclideo. Le tre forme tipiche trovate possono dirsi così, corrispondentemente al caso $n = 2$ [1], la forma *ellittica*, *iperbolica* e *parabolica* dell'elemento lineare dello spazio pseudosferico.

4. *Caso della curvatura positiva.* — Ci resta da dimostrare il teorema fondamentale nel caso che la curvatura sia una costante positiva

$$K_0 = \frac{1}{R^2},$$

ciò che faremo ammettendo vero il teorema per gli spazî di curvatura costante positiva a $n-1$ dimensioni e dimostrando che esso sussisterà anche per gli spazî ad n dimensioni. Così, ricordando che per $n = 2$ il teorema sussiste [2], l'avremo stabilito in generale.

Con processo analogo a quello dei numeri precedenti si darà all'elemento lineare dello spazio a n dimensioni colla curvatura costante $K_0 = \frac{1}{R^2}$ la forma

$$ds^2 = dx_1^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \cdot \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{14}$$

[1] *Lezioni*, pag. 183.
[2] *Lezioni*, pag. 180.

essendo anche qui le b funzioni di $x_2, x_3, \ldots x_n$. Calcolando per la forma differenziale

$$\sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{15}$$

i simboli a quattro indici, troviamo

$$(rk\,,ih)_b = \frac{1}{R^2}(b_{ri}\, b_{hk} - b_{rh}\, b_{ik})\,.$$

La forma (15) appartiene dunque, come quadrato dell' elemento lineare, ad uno spazio ad $n-1$ dimensioni di curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$ e può quindi, per ipotesi, identificarsi con una forma tipica determinata. Lo stesso accade dunque della forma differenziale (14) c. D. D.

È chiaro che, applicando successivamente il nostro processo di riduzione, ridurremo l' elemento lineare dello spazio a n dimensioni colla curvatura costante positiva alla seguente forma tipica:

$$ds^2 = R^2 \left\{ dy_1^2 + \operatorname{sen}^2 y_1\, dy_2^2 + \operatorname{sen}^2 y_1 \operatorname{sen}^2 y^2\, dy_2^2 + \cdots + \operatorname{sen}^2 y_1 \operatorname{sen}^2 y_2 \ldots \operatorname{sen}^2 y_{n-1}\, dy_n^2 \right\}.$$

Fisica terrestre. — *I terremoti nell' isola di Labuan (Borneo) del 21 settembre 1897.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Intorno alle $20^h \frac{1}{2}$ del 20 ed alle $6^h \frac{1}{2}$ (t. m. E. C.) del 21 settembre, i più delicati strumenti di alcuni Osservatorî italiani ed anche esteri cominciarono ad essere agitati a causa di lontana commozione sismica, e la perturbazione fu di lunghissima durata.

Si seppe più tardi che circa le stesse ore fu perturbato lievemente anche il magnetografo di Batavia nell' isola di Giava [1]. Essendosi subito scritto dall' Ufficio Centr. di Met. e Geod. di Roma all' Osservatorio magnetico e meteorologico di Batavia, si ebbero i particolari delle indicazioni fornite da quelli strumenti magnetici a registrazione fotografica e si apprese che le perturbazioni in parola erano probabilmente dovute alla comparsa d' una nuova isola vulcanica presso Labuan sulla costa NW di Borneo. La prima perturbazione, durata circa 20 minuti, cominciò alle $2^h 24^m$ ant. (t. m. civile) del 21 settembre sul fotogramma della forza magnetica orizzontale e si manifestò anche più sensibilmente sul fotogramma dell' elettrometro

[1] Giornale inglese *Nature*, n. 1473, 20 genn. 1898, pag. 272-273.

destinato allo studio dell' elettricità atmosferica. La seconda perturbazione, ben più pronunciata della precedente e della durata ugualmente d' una ventina di minuti, ebbe principio a $0^h30^m,25$ pom. (t. m. civile) dello stesso giorno 21, e questa volta influenzò anche il declinometro e l' apparecchio per la variazione della forza magnetica verticale. Il chiarissimo direttore dell' Osservatorio di Batavia, il quale ha gentilmente comunicate queste notizie, aggiunge che entrambe le perturbazioni hanno il carattere d' essere puramente meccaniche e non magnetiche e che in corrispondenza delle medesime non solo non si avvertì alcuna scossa di terremoto nè in Batavia, nè altrove, ma non funzionò affatto il sismografo Ewing-Milne.

Più tardi ancora, si è saputo che in corrispondenza della seconda delle anzidette due perturbazioni, entrò in lieve movimento anche il bifilare magnetico di Bombay e precisamente a 10^h40^m ant. (probabilmente t. m. locale) del 21 (1).

In quanto alle particolarità relative alle indicazioni fornite in questa circostanza dagli strumenti italiani ed esteri, rimando al Boll. della Soc. Sism. Ital., vol. IV, 1898, dove si trovano pubblicate le notizie sismiche relative al 2° semestre 1897. Io mi limito qui a prendere in considerazione i dati orarî ottenuti nei varî Osservatorî, per cercare di formarci un' idea della propagazione delle onde sismiche dall' epicentro fino alla lontana Europa.

Come sopra si è visto, non si hanno indicazioni esatte sulla posizione dell' epicentro delle due scosse di terremoto, che furono causa delle perturbazioni registrate dagli strumenti di Batavia, di Bombay e d' Europa. È tuttavia probabile che entrambe le scosse abbiano avuto lo stesso epicentro e che questo non si trovi troppo discosto dall' isola di Labuan, le cui coordinate geografiche sono in cifra tonda:

$$\text{lat. } 5^\circ \tfrac{1}{3} \text{ N; long. } 115^\circ \tfrac{1}{5} \text{ E Greenw.}$$

Contando dunque le distanze delle varie località dall' isola di Labuan, ritenuta prossima all' epicentro, e riducendo tutte le ore al tempo medio dell' Europa centrale (2), cominciamo col formare il seguente prospetto, dove tra gli altri dati si trovano calcolate le velocità medie e superficiali di propagazione delle onde sismiche, ottenute direttamente dal confronto dei dati orarî delle varie località, relativi al principio della perturbazione, con quelli di Batavia.

(1) Giornale inglese *Nature*, n. 1494, 16 giugno 1898, pag. 157.

(2) Per la riduzione delle ore di Batavia e Bombay si è partiti dal meridiano dei segnali del tempo di dette città, il quale dista di circa $7^h7^m\,{}^1/_2$ da quello di Greenwich per Batavia e di $4^h51^m\,{}^1/_3$ circa per Bombay.

Distanze dall' Isola di Labuan	Località	Scossa del 20 settembre			Scossa del 21 settembre			Strumenti adoperati
		Principio della perturbazione (t. m. E. C.)	Velocità al secondo	Durata della perturb.	Principio della perturbazione (t. m. E. C.)	Velocità al secondo	Durata della perturb.	
Km.		h m	Km.	ore	h m	Km.	ore	
1580	Batavia	20 16,5	—	—	6 22,75	—	—	magnetografo
4830	Bombay	—	—	—	» 48,6	2,10	$\frac{1}{4}$	»
9050	Nicolaiew	» 23,5	17,71	4	» 27,0	29,29	>1	pendolo orizzontale fotografico
10350	Potsdam	» 26,0	15,38	2	circa » 30,0	20,16	3	»
10530	Catania	» 25,1	17,35	$2\frac{1}{4}$	» 29,5	22,10	$1\frac{1}{2}$	sismometografo (m. 25, kg. 3.0)
10560	Ischia	» 21 9	27,71	$2\frac{1}{2}$	» 28,2	27,46	$1\frac{3}{4}$	pendolo orizzontale a registrazione meccanica
10630	R. di Papa	» 25,0	17,75	$2\frac{1}{2}$	» 32,1	16,13	$1\frac{1}{2}$	sismom. (m. 15, kg. 250) e pend. oriz. a registr. mecc.
10650	Roma	» 21,9	27,99	$2\frac{1}{2}$	» 29,7	21,75	$>1\frac{1}{4}$	sismometografo (m. 16, kg. 200)
11200	Edimburgo	» 56,0	4,06	$\frac{1}{2}$	7. 7,5	35,8	$\frac{1}{2}$	pendolo bifilare fotograf.
11430	Shide	» 24,8	19,78	3	6.28,85	26,91	3	pendolo orizz. fotografico

Ad eccezione delle velocità relativamente lievi che vengono fuori per Bombay ed Edimburgo, e su cui ritorneremo in appresso, giustamente si rimane colpiti dinanzi gli altissimi valori che si ottengono per le altre località, valori che si spingono fin circa ai 30 km. al secondo per l' una e l' altra delle due scosse considerate. Questo risultato è, come si vede, talmente diverso da quello che si trovò pel terremoto dell' India del 12 giugno precedente [1], che ha bisogno d' essere un po' discusso.

Si potrebbe anzitutto ricercare la differenza in parola nella maggiore distanza che hanno dovuta questa volta superare le onde sismiche per propagarsi da Borneo fino in Europa. Questa circostanza sarebbe, in vero, da prendersi in conto, nell' ipotesi che le onde sismiche le più veloci — quelle precisamente da noi qui considerate e che probabilmente sono le longitudinali contemplate nella teoria dei corpi elastici indefiniti — siansi realmente propagate lungo le corde invece che lungo i circoli massimi. Nel nostro caso, la differenza tra la corda ed il circolo massimo, per ogni località europea, è abbastanza sensibile. Così, per Shide che è appunto la località più lontana, mentre la lunghezza dell' arco del circolo massimo, che la riunisce all' isola di Labuan, è di circa 11430 km., la lunghezza della corda è soltanto di 9960 km., e si ha così una differenza in meno di 1470 km. che è quasi

[1] G. Agamennone, *Il terremoto dell' India del 12 giugno 1897 registrato in Europa.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. VII, p. 265, 1° sem. 1898. — Id. *Eco in Europa del terremoto indiano del 12 giugno 1897.* Boll. della Soc. Sism. Ital., vol. IV, 1898, pag. 41.

l' 8ª parte della lunghezza dell' arco (1). Perciò la velocità delle onde sismiche, supposte aver percorsa la corda, diminuirebbe appunto di $\frac{1}{8}$ divenendo di soli circa 17 km., invece d' una ventina, per la 1ª scossa e di soli 23 $\frac{1}{2}$ circa, invece di 27, per la 2ª scossa.

Ma un' altra causa, ben altrimenti importante, potrebbe aver agito nell' accrescere apparentemente la velocità delle onde sismiche in questione, ed è che le ore di Batavia sono troppo alte, per riferirsi le medesime ad una fase già inoltrata del movimento. Ciò è tutt' altro che impossibile, anzi è assai probabile, se si abbiano presenti molti altri casi consimili che si sono verificati in occasione de' passati terremoti, sovratutto quando si tratti di strumenti magnetici la cui sensibilità è, in generale, assai minore in confronto degli appositi strumenti sismici adoperati in Italia e dei delicati pendoli orizzontali a registrazione fotografica in funzione in alcuni Osservatorî d' Europa. Una conferma di quanto si asserisce potrebbe essere anche il fatto che la velocità, ricavatasi per Bombay, è di gran lunga minore di quella ottenuta per le località europee, appunto perchè gli stessi strumenti magnetici di Bombay non sarebbero stati perturbati che al sopraggiungere di una fase assai inoltrata del movimento, quando cioè le onde sismiche erano già abbastanza intense; mentre il magnetografo di Batavia, per ritrovarsi assai più vicino all' epicentro, avrebbe potuto agitarsi ad una fase anteriore del movimento, in guisa che il principio della perturbazione nelle due località sarebbe avvenuto a due fasi abbastanza diverse del moto e perciò all'arrivo di onde sismiche dotate di velocità diversa (2). Oltre a ciò, se si volesse, invece di Batavia, assumere come termine di confronto Bombay, per il calcolo della velocità del movimento fino in Europa, relativo alla 2ª scossa, si otterrebbero velocità negative per tutti gli Osservatorî europei, eccettuato quello d' Edimburgo e ciò per ragioni che diremo tra poco.

Se si ammettesse, per le ragioni esposte, che i dati orarî di Batavia, presi come punto di partenza per il calcolo della velocità di entrambe le scosse, fossero troppo elevati soltanto di 5 minuti, si vedrebbe d' un subito ridursi a un valore quasi metà la velocità d' una trentina di chilometri che da principio è stata trovata per molti Osservatorî.

Dalle considerazioni precedenti si vede dunque che la velocità inverosimile dai 15 ai 30 chilometri, che è stata sopra trovata per le località europee, è assai probabile che sia molto lontana dal vero. Tenuto poi anche

(1) Nell' ipotesi che queste onde sismiche siansi realmente propagate lungo la corda, esse sarebbero passate alla massima distanza di circa 2400 km. dalla superficie terrestre, ciò che costituisce circa i $^{2}/_{5}$ del raggio del globo.

(2) Anche per il terremoto dell' India, sopra indicato, si hanno serie ragioni per credere che il magnetografo di Bombay non sia stato perturbato che al sopraggiungere di una fase già inoltrata del movimento, in modo che ponendo a riscontro l' ora di questa località con i dati orarî d' Europa si ottennero appunto velocità troppo grandi.

conto dell' incertezza nella posizione dell' epicentro, non è impossibile che per le due scosse in questione la velocità effettiva delle onde sismiche le più veloci, si avvicini, fatte le debite correzioni sopra indicate, ad una diecina di chilometri al secondo, valore appunto già trovato pel terremoto indiano del 12 giugno 1897 ([1]).

Le onde più celeri, di cui abbiamo fin qui parlato per ambo le scosse, si sono manifestate negli strumenti italiani — i soli dove tale ricerca possa farsi — sotto forma di ondulazioni che presentano generalmente lo stesso periodo oscillatorio strumentale; indizio questo che gli attuali strumenti mal si prestano ancora a fornire questo elemento, sopratutto a causa dell' insufficiente velocità di svolgimento della carta ([2]). Solo si sa che le ondulazioni registrate dal grande sismometrografo di Catania presentano un periodo semplice di circa 3^s al principio della perturbazione, mentre il periodo oscillatorio del pendolo è di 5, e che per la 2^a scossa le ondulazioni sono stimate d' un periodo di circa 2^s per Rocca di Papa e piuttosto rapide per Ischia.

Dopo, sottentrano svariate fasi della perturbazione registrata ne' diversi Osservatorî e sarebbe invero assai difficile il potervisi raccapezzare. Questa difficoltà è però minore quando si tratta della parte dei diagrammi dove le ondulazioni si fanno assai più lente, specialmente quando si prenda di mira la fase massima, cioè l' arrrivo delle più ampie ondulazioni del suolo. Nei seguenti prospetti si trovano riuniti alcuni dati orarî che valgono a dare un' idea della velocità di dette ondulazioni per entrambe le scosse.

([1]) Con questo non voglio dire che la velocità debba essere assolutamente la stessa per i varî terremoti; poichè per il solo fatto che le onde sismiche abbiano percorsa una corda più o meno lunga, e perciò propagatesi più o meno addentro nelle viscere del globo terrestre, ne potrebbe derivare una differenza anche rimarchevole nella velocità.

([2]) Questa lacuna non è a lamentare negli strumenti di Roma, forniti del mio *registratore a doppia velocità*; ma per le scosse, di cui ci occupiamo, questo meccanismo non potè disgraziatamente funzionare, a causa della poca entità del movimento sismico.

Scossa Prima.

Località	Periodo oscillatorio semplice	Ore delle varie fasi		Velocità al minuto secondo in Km.			
	s	h m					
Catania	9	20.42	princ.	5,8	...	...	...
	più lente	20 55		...	3,9	...	...
	11½	21. 9		...	...	2,8	...
Ischia	7½	20.46		5,1	...	...	...
	8½	20.51		4,3	...	...	...
	20	20.59	princ.	...	3,5	...	...
	8½	21.10-35	mass.	...	...	2,8	...
Rocca di Papa	s 9	20.40	princ.	6,5	...	...	...
		20.46	mass.	5,1	...	...	...
		21.2½-7½	»	...	3,3-3,0	...	...
		21.12½-14½	»	...	...	2,7-2,6	...
		21.28	»	...	...	...	2,1
Roma	lente	21. 0	princ.	...	3,5	...	...
	»	21.12,3	mass.	...	...	2,7	...
	11,7	21.17-19	»	...	...	2,5-2,4	...
	9,2	21.21-23½	»	...	...	...	2,3-2,2
	7,8	21.26	decr.	...	...	...	2,2
Shide	...	21.4,8	fine dei tremiti	...	3,4	...	...

Scossa Seconda.

Località	Periodo oscillatorio semplice	Ore delle varie fasi		Velocità al minuto secondo in Km.			
Catania	17	7.4-11		...	3,6-3,1	...	...
	10½-11	7.16,4		...	...	2,8	...
	9	—		...	...	...	...
	7	—		...	...	...	...
Ischia	20	7.3	princ.	...	3,7	...	...
	8½-12	7.10-15		...	...	3,1-2,9	...
	6½-7	7.20-25		...	...	...	2,6-2,4
Rocca di Papa	7	6.46-48		6,5-6,0	...	...	...
	19	6.54½-57		4,8-4,4	...	...	...
	19	7.9½-10½		...	3,2-3,1	...	...
	19	7.14½-16		...	...	2,9-2,8	...
	7	7.22,25½		...	...	...	2,6-2,4
Roma	20	7.3-6		...	3,8-3,5	...	...
	10	7.10		...	...	3,2	...
	7½	7.20-25		...	...	...	2,6-2,4
Shide	...	7.11,85	fine dei tremiti	...	3,34	...	...

Qui si vede come le prime ondulazioni del suolo, a periodo più o meno lento apparse negli strumenti, si sono propagate con velocità di km. $4\frac{1}{2}$-$6\frac{1}{2}$; quelle alquanto più pronunciate con velocità di km. 3-$4\frac{1}{2}$; quelle costituenti la fase massima con velocità di km. $2\frac{1}{2}$-3; e finalmente quelle, che già sono in decrescenza, con una velocità inferiore a km. $2\frac{1}{2}$ (1). Se ci riportiamo ora alla 1ª tabella, dove si trovano le velocità delle prime onde sismiche rivelate dagli strumenti, è logico il doverne concludere: in primo luogo che per entrambe le scosse il pendolo bifilare d'Edimburgo non è stato perturbato che al sopraggiungere delle ondulazioni del suolo a lento periodo e già alquanto pronunciate, quelle precisamente che fecero disparire la curva del pendolo orizzontale di Potsdam; in secondo luogo che il magnetografo di Bombay non ha risentito l'effetto, in occasione della sola 2ª scossa, la più intensa, che delle ondulazioni più ampie a lento periodo (2). Questa conclusione, d'altronde abbastanza logica, serve a confermare l'ipotesi da noi sopra emessa, che cioè anche il magnetografo di Batavia non deve essere stato perturbato che ad una fase già abbastanza inoltrata del movimento sismico, ciò che serve appunto a spiegare le inverosimili velocità che si trovano consegnate nella 1ª tabella.

È da notare che la velocità di km. $2\frac{1}{2}$-3, relativa alle più ampie ondulazioni del suolo a lento periodo, s'accorda bene con quella di circa km. 2,7, già calcolata pel terremoto dell'India del 12 giugno 1897.

In quanto al periodo oscillatorio di dette ondulazioni, la misura non ne è abbastanza sicura, per potervisi fondare per un calcolo del sollevamento ed abbassamento periodico del suolo, prodottosi al loro passaggio; ma a giudicare dall'ampiezza dei tracciati ottenuti con i varî strumenti, è lecito concludere che l'entità di siffatto sollevamento ed abbassamento dev'essere stata assai minore di mezzo metro, valore che per appunto si riscontrò pel terremoto indiano.

Come si è visto, la conoscenza esatta della fase del movimento, corrispondente ai varî tratti dei diagrammi, ottenuti nelle differenti località, ha una capitale importanza nelle ricerche sulla velocità delle onde sismiche ed in altre non meno interessanti che vi si riattaccano. Da qui si vede quanto sarebbe necessario poter disporre, nelle varie località, di strumenti identici

(1) Dinanzi a tanta varietà di valori per la velocità delle ondulazioni in parola, parmi che l'imbarazzo della scelta dev'essere tutt'altro che lieve, per il calcolo della distanza dell'epicentro da un dato luogo d'osservazione, nell'ipotesi che realmente la provenienza del terremoto sia del tutto sconosciuta.

(2) Se questa conclusione è giusta, sarebbe in certo qual modo spiegato, come i magnetografi d'Europa, tante volte più distanti dall'epicentro, non abbiamo nulla indicato, all'eccezione di quello d'Utrecht, senza dubbio sensibilissimo, il quale fu perturbato soltanto alla 2ª scossa ed in corrispondenza al passaggio delle più ampie ondulazioni del suolo.

e posti, per quanto è possibile, in condizioni d'uguale sensibilità (¹), le cui indicazioni sarebbero tra loro più facilmente comparabili e servirebbero a meraviglia per seguire la trasformazione che vanno man mano subendo colla distanza le diverse fasi del movimento.

Le incertezze dei risultati che provengono dalla confusione che si fa tra le varie specie d'onde sismiche, dotate di diversa velocità, sono oggi ben più considerevoli di quelle che provengono da una non rigorosa determinazione delle ore, quando trattasi di terremoti provenienti da enormi distanze.

[1] Su ciò ho già insistito nella mia Nota precedente: *Influenza della diversa qualità e sensibilità degli strumenti sulla misura della velocità delle onde sismiche*. Boll. della Soc. Sism. Ital., vol. II, 1896, pag. 203.

PERSONALE ACCADEMICO

Pervenne all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio nazionale Giuseppe Gibelli, mancato ai vivi il 16 settembre 1898; apparteneva il defunto Socio all'Accademia sino dal 13 febbraio 1890.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 2 ottobre 1898

Zoologia medica. — *Rapporti tra la malaria e peculiari insetti (zanzaroni e zanzare palustri).* — Nota preliminare del Socio B. Grassi.

Credo che Laveran sia stato il primo a mettere in rapporto le zanzare colla malaria; senonchè il tentativo fatto dal dott. Calandruccio e da me per fornire una base positiva a siffatta ipotesi riuscì vano. Successivamente quest' ipotesi del Laveran, più o meno modificata, fu ripresa da varî autori e soprattutto da Bignami e da Dionisi, che cercarono di confortarla con acutissimi ragionamenti e anche con osservazioni. Bisogna riconoscere, che essa ha acquistato un altro forte argomento in suo favore, dopo la dimostrazione indiscutibile che la febbre del Texas viene propagata dalle zecche, le quali sono l' oste intermedio del parassita di questa febbre, certamente affine a quello della malaria.

Queste circostanze m' invogliarono a riprendere l' argomento, ciò che ebbi appunto occasione di fare dal 15 luglio in poi.

Comincerò a premettere d' aver subito trovato la spiegazione della mancante febbre del Texas almeno in molte parti della Lombardia. Ciò è subordinato alla mancanza delle zecche; esse non hanno punto occasione di svilupparsi sui bovini per la grande pulizia con cui sono tenuti dai nostri fittabili.

I parassiti malarici degli uccelli sembrano avere uno sviluppo con un oste intermedio differente da quello dei nostri parassiti malarici. E invero a Locate Triulzi, località molto infestata dalla malaria, non ho trovato infezione

malarica nei piccioni e nei passeri, che si possono trovare invece infetti in luoghi non malarici.

Invano ho tentato in ottime condizioni di far sviluppare nei piccioni e nei passeri i parassiti malarici, facendoli pungere da parecchie specie di zanzare, di cui parlerò più sotto. Occorre però ripetere l' esperienza con altre (*C. penicillaris* e *C. malariae*), ciò che appunto sta facendo Dionisi.

Passiamo ora a considerare più particolarmente la malaria dell'uomo.

L'ipotesi che le zanzare ne siano l'oste intermedio ha trovato in me un oppositore, sopratutto perchè le zanzare sono comunissime in molti luoghi ne' quali non c'è affatto, o manca quasi del tutto la malaria. Cito tra questi luoghi la città di Catania, almeno una gran parte di Venezia, i Bagni di Montecatini, Sarzana e molti altri punti della Riviera Ligure. Anche nel centro di Milano (via Gesù, per es.) le zanzare possono essere addirittura un vero flagello, senza che si verifichi un sol caso di malaria.

Della Lombardia asciutta conosco, fra gli altri villaggi, Lurago Marinone e Bregnano dove quest'anno le zanzare furono abbondanti senza che siasi sviluppata la malaria. A Rovellasca, villaggio assolutamente immune da malaria, le zanzare quest'anno disturbarono non poco.

Della Germania conosco specialmente Schwetzingen presso Heidelberg; esso è il nido delle zanzare, eppure casi di malaria vi si verificano rarissimamente.

Resta dunque accertato soltanto che *là dove c'è malaria, ci sono zanzare, ma non regge il viceversa*, cioè, *là dove abbondano le zanzare, può mancare la malaria.*

Ciò specialmente mi s'imponeva a Rovellasca, dove per ragioni di commercio non pochi individui tornano affetti di malaria; eppur la malaria non è mai diventata autoctona, non ostante che ci siano, come ho sopra detto, le zanzare, le quali si sviluppano in certi stagni artificiali, che in Lombardia vanno col nome di vasche. Questi stagni però non sono perenni e vengono costituiti esclusivamente coll'incanalare l'acqua piovana.

Fu la monografia del Ficalbi sulle *Culicidae europee* che mi fece conoscere come molte e differenti specie ematofage vadano comprese in questa famiglia. Occorre perciò vedere se oltre alla forma comunemente nota sotto il nome di zanzare, *Culex pipiens* Linn., esistano altre zanzare o forme affini alle zanzare, le quali possono spiegare *la non coincidenza esatta e costante tra le zanzare e la malaria.*

Questo concetto, già accennato anche da Dionisi da parecchi mesi, mi ha condotto ad una serie di ricerche, dalle quali è risultato che *ne' paesi malarici, oltre alle specie che si trovano nei luoghi non malarici, ve ne sono costantemente altre, le quali mancano assolutamente in questi ultimi.*

La sistematica delle zanzare è ancora molto imperfetta: io mi atterrò per ora quasi interamente al Ficalbi, il quale ha il merito d'aver descritto in modo inappuntabile un certo numero di specie.

Nei luoghi non malarici la specie di zanzare predominante di gran lunga sulle altre è il solito *Culex pipiens*, il quale invece è più o meno scarso fino a mancare in non pochi focolari malarici (Locate Triulzi, vicino a Colico, Maccarese ecc.), intendendo per focolari malarici quei punti precisi, ove soggiornando notoriamente si prende la malaria.

A questo riguardo è d'uopo però di non lasciarsi trarre in inganno. Così a Follonica (nelle Maremme Toscane), paese molto tormentato dalla malaria, la casa, che a pian terreno serve come spedale delle fonderie e al piano superiore come abitazione del medico condotto, nell'agosto scorso ospitava soltanto il *Culex pipiens*, ma però non si può asserire affatto che essa costituisse un focolaio malarico. E infatti il medico non ebbe mai a verificare lo sviluppo *de novo* di casi di malaria tra i degenti all' ospedale. Tra gli operai delle fonderie invece, che abitano poco lontano, in alloggi annessi alle fonderie stesse, i casi di malaria sono all' ordine del giorno, e tutto concorre a far credere che la malaria possa svilupparsi in questi alloggi. Cercando in essi ho trovato scarsissimi *Culex pipiens* e abbondanti invece certi zanzaroni, di cui parlerò più avanti.

È evidente insomma che la zanzara ordinaria, il *Culex pipiens*, non può essere oste intermedio dei parassiti malarici, *trovandosi esso molto più comune in certi luoghi non malarici, che in molti luoghi malarici.*

Nei luoghi non malarici però trovasi un' altra specie di zanzare (usiamo il termine in senso lato). Sono grosse e rassomigliano molto ai *Culex elegans*, ma se ne distinguono facilmente perchè raggiungono una grandezza maggiore e perchè non hanno i tarsi alboannulati (anellati di bianco). Queste zanzare sono frequenti nei boschi di Rovellasca e dei dintorni, luoghi immuni da malaria.

Esse pungono qualche volta di giorno, ma a grandissima preferenxa al crepuscolo l'uomo, il bue, il cavallo e anche gli uccelli. Una specie che io non posso distinguere si trova molto comune a Schwetzingen. Io non l'ho potuta classificare e perciò la lascerò innominata. Questa specie non entra però mai nelle case fuori dei boschi, che perciò essa non abbandona mai. Io l'ho riscontrata nei boschi del Ticino, in punti certamente malarici: non l' ho riscontrata però negli altri luoghi malarici da me visitati.

Anche la specie in discorso dev' essere innocente.

Alla Stazione zoologica di Napoli, luogo certamente immune dalla malaria, si trova il *Culex elegans* Ficalbi. Io non l' ho trovato in alcuna località malarica. Esso pure dev' essere innocuo.

Si trova invece costantemente in tutti i luoghi malarici e più frequente nei luoghi, in cui la malaria è maggiore, una grossa zanzara che molti denominano anche zanzarone, o moschino.

Esso vien appellato dai zoologi *Anopheles claviger*, Fabr. Già il Ficalbi ha notato che è molto numeroso in Italia, ma più che tutto nei luoghi

di piano, ricchi di acque non troppo sporche e che può pungere l' uomo e il bestiame domestico.

Questa specie (caratterizzata da quattro macchiette alle ali disposte in guisa da accennare quasi ad una lettera ti maiuscolo) può definirsi *vero indice, vera spia della malaria.* I rapporti fra l' *Anopheles claviger* e la malaria sono così sorprendenti che veramente impongono e conducono alla persuasione che tra di loro debba esistere un nesso. Si può aggiungere che l' ambiente palustre è necessario allo sviluppo di questa specie.

Nel lavoro in esteso citerò molti fatti particolari: qui ne riferirò brevemente soltanto alcuni.

Il rapporto intimo fra l'*Anopheles claviger* e la malaria è stato da me verificato per molte località della Lombardia, del Veneto, delle Maremme Toscane e anche per alcune località della Campagna Romana ecc.

Nei pochi prati irrigui vicini al lago d' Alserio, in Brianza, inaspettatamente trovai abbondante l'*Anopheles claviger*. Per un momento credetti d' aver trovato una grave obbiezione alla teoria dei zanzaroni, ma rivoltomi all' intelligentissimo medico-condotto, appresi che anche ad Alserio, i casi di malaria non sono molto rari e dovetti riconoscere infondata la mia credenza che vi mancassero. Nel padule di Fucecchio, vicino ai bagni di Montecatini, m' era stato assicurato che non si davan casi di malaria. Io trovai su questa località l'*Anopheles claviger*, ma conobbi anche una famiglia che abita in mezzo al padule, la quale ebbe a lottare non poco colla malaria.

La famiglia che vive in un casello a circa 2600 metri in su di Colico, viene spietatamente tormentata dalla malaria e dagli *Anopheles claviger*.

Più in su vi sono i paeselli Campo e Novate, i quali d' estate vengono abitualmente abbandonati tanto la malaria vi infierisce. Io li visitai il 17 agosto sicuro di trovarvi un' enorme quantità di *Anopheles claviger;* invece questi zanzaroni erano piuttosto scarsi in rapporto colla circostanza che le acque del lago erano, come si dice, *grasse,* cioè grosse. Da informazioni assunte presso varie famiglie restate in luogo, seppi però che la malaria quest' anno poco si faceva sentire. Tra le altre la famiglia del Capo stazione di Novate da circa un mese si trovava sul posto e non lamentava ancora alcun caso di malaria.

A Locate Trivulzio, nei paeselli e nei cascinali circostanti, dal 17 luglio al 27 agosto, i casi di malaria furono molto abbondanti e i zanzaroni costituirono un vero flagello. Nell' Albergo della Corona dov' io alloggiava, furono attaccati tre su quattro persone della famiglia, le quali da molti giorni non s' erano allontanate dall' Albergo: in esso i zanzaroni costituivano un vero flagello.

Vicino a Saronno, in mezzo a una zona non malarica si trova un piccolo centro malarico (cascina Girola). In questa località trovasi localizzato, dirò addirittura confinato, l'*Anopheles claviger* che manca quindi nei dintorni. Un fatto simile si verifica vicino al laghetto di Ceriano.

A Lainate, il canale Villoresi ha portato la malaria e l' *Anopheles claviger* in abbondanza.

In una certa zona circostante a Cuggiono il canale Villoresi viene utilizzato ancora limitatamente: la malaria manca ancora e gli *Anopheles claviger* sono ancora molto scarsi.

Nella valle d' Induno in praterie, che costituiscono un notorio focolaio di malaria, gli *Anopheles claviger* sono abbondanti.

Le risaie dovunque sono fomite di malaria e abitacolo enormemente propizio per la moltiplicazione dei zanzaroni.

Vicino a Veniano c' è una microscopica risaia, insufficientemente provvista d'acqua tanto che certe annate il riso non vi prospera. Io non vi ho trovato zanzaroni, ma il medico-condotto non ha neppur verificato casi di malaria negli individui dei dintorni.

Nei mulini tra Como e Camerlata la malaria è sconosciuta e io non vi ho trovato zanzaroni. Alla Guzza vicino a Camerlata si dà qualche raro caso di malaria e s' incontra qualche raro zanzarone.

A Schwetzingen i zanzaroni sono molto scarsi, ma del pari rarissimi sono i casi di malaria.

Finora ho trovato una sola eccezione ed è la seguente: Nella Villa Uboldi a Cascina Ferrara, vicino a Saronno, c' è, dirò così, una spanna di palude artificiale e qualche *rarissimo* zanzarone. Non mi costa che vi siano stati casi di malaria: considerando però che questa spanna di palude è artificiale e relativamente recente (data da circa un secolo), si può facilmente credere che sia mancata ancora ai zanzaroni l' occasione di infettarsi, molto più che per la peculiare ubicazione di questa microscopica palude, soltanto pochi individui hanno occasione di venir punti da essi [1].

Riassumendo: zanzarone (*Anopheles claviger*) e malaria sono intimamente connessi.

Nell' epoca, in cui trovai enormemente diffuso il zanzarone, predominava moltissimo la terzana ed io perciò lo metterei in rapporto sicuro colla terzana.

A Locate Triulzi, dove ho fatto un soggiorno molto più lungo e ricerche molto più estese, ho trovato un altro *Anopheles* che punge l' uomo: l'*Anopheles pictus* Loew. Esso era però estremamente raro in agosto, meno raro in settembre. Nei luoghi malarici della Campagna Romana e nei boschi del Ticino raramente si trovano anche altre due specie di *Anopheles:* il *bifurcatus* e il *nigripes.*

L'*Anopheles nigripes* si trova anche a Schwetzingen non molto raro e qualche rarissima volta (ne ottenni due soli esemplari) anche nei boschi di Rovellasca, immuni, come dissi, di malaria. Occorrerà fare ricerche più estese dal

[1] Certi fatti che seppi di recente e che accennerò nel lavoro in esteso, mi fanno supporre che molti anni fa siasi verificato qualche caso di malaria anche nel focolaio in discorso.

maggio alla metà di luglio per determinare se oltre all'*Anopheles claviger* anche gli altri *Anopheles* debbono mettersi in rapporto colla malaria.

Nei luoghi malarici si trovano anche parecchie specie di *Culex* e precisamente il *penicillaris* Rondani, il *Richiardii* Ficalbi, l' *hortensis* Ficalbi. Nella stagione in cui io ho fatto le mie ricerche, benchè fosse molto comune, raramente il *C. hortensis* s'attaccava all' uomo e non l'ho trovato mai nelle abitazioni. Il *C. Richiardii* manca a Locate Triulzi; è invece abbondante in altri luoghi malarici (Follonica, vicino a Colico, ecc.). Il *C. penicillaris* abbonda moltissimo in tutti i luoghi palustri, anche nel settembre, quando la malaria va già rimettendo nella Lombardia.

Il *C. Richiardii* per quanto ho finora veduto, manca assolutamente nei luoghi non malarici. Invece nei boschi di Rovellasca nell' agosto non era raro il *C. penicillaris* che scomparve però in settembre. Trovai costantemente nei boschi di Rovellasca qualche *C. hortensis*, che mai però s' attaccò all' uomo. Ricordando la grandissima quantità di *C. hortensis* e di *C. penicillaris*, che si trovano nei luoghi malarici e riflettendo che i boschi di Rovellasca corrispondono alla valle del torrente Lura e si prolungano senza interruzione lungo lo stesso torrente fino a luoghi diventati, per quanto io so, malarici da poco tempo a causa del canale Villoresi, penso che si trattasse di individui che si fossero dispersi di recente da punti malarici, epperciò non autoctoni dei boschi stessi di Rovellasca.

Le tre specie in discorso sono dunque *a priori* sospette. Il *C. hortensis* lo è meno perchè si trova troppo comune in zone che se pur sono sempre malariche (talora alle frontiere delle zone malariche), lo sono molto debolmente (Olgiate Olona).

A Tartavalle e dintorni, mentre il suolo sembra propizio allo sviluppo della malaria, in realtà questa infezione non si verifica: io non vi trovai nè zanzare nè zanzaroni, eccetto qualche raro *C. hortensis*.

Il mancare del *Culex Richiardii* in località dove prosperano tutte le varie specie di parassiti malarici, dimostra che esso *non è necessario* per lo sviluppo della malaria.

Invece il *C. penicillaris vuolsi considerare spia della malaria, come l' Anopheles claviger*, specialmente se le osservazioni si fanno, invece che in luglio e in agosto, in settembre, mese nel quale l' *Anopheles claviger* cede molto del suo predominio al *C. penicillaris* anche nei luoghi dove la malaria infierisce in settembre come in agosto. Certi casi di malaria sviluppatisi in settembre a Locate Triulzi, nei quali gli *Anopheles* di certo o non punsero o soltanto rarissime volte, *denunciano decisamente come trasmissore il Culex penicillaris*.

Io non ho fatto che pochissime ricerche dove dominano le forme perniciose; vi ho trovato però una specie di zanzara che ritengo non ancor descritta almeno in modo riconoscibile e che denomino *C. malariae*; è caratterizzata:

1° dai tarsi alboannulati alla base, ma gli anelli bianchi sono assai stretti, visibili però distintamente ad occhio nudo nel terzo paio di zampe; 2° dai tergiti addominali bruni-neri col margine anteriore bianco; 3° dal torace con pelurie color oro scuro con ornamentazioni bianche laterali; 4° dai palpi del maschio anellati di bianco. Questa specie comunissima a Maccarese non è stata da me ritrovata con sicurezza fuori della Campagna Romana e dei boschi del Ticino.

Importanti a notare sono pure i seguenti fatti.

L' *Anopheles claviger* punge specialmente, quando è in grandissimo numero, qualche volta anche di giorno e di notte: le sue ore però di gran-dissima lunga predilette sono da circa mezz' ora a circa un' ora dopo il tramonto. In quest' ora e mezza un individuo può ricevere più di un centinaio di punture, mentre non ne riceverà cinque in tutte le altre ore. Ciò ho cominciato ad osservare soltanto nella seconda metà d' agosto: prima di quest' epoca non ho fatto osservazioni. Anche l' *Anopheles pictus* e il *nigripes* punsero al far della sera.

Il *Culex penicillaris* punge anche di giorno, molto di più però ai crepuscoli, sopratutto a quello serale. In settembre, mentre gli *Anopheles claviger*, benchè tuttora numerosi, quasi non pungevano più, i *Culex penicillaris* erano ancora noiosissimi. Queste osservazioni sono state fatte a Locate. Nella Campagna Romana, sia per la temperatura più alta, sia per l' enorme quantità delle due specie in discorso, si dànno differenze, sopratutto perchè le loro punture si fanno sentire anche a notte più inoltrata. Il *Culex malariae* si comporta come il *Culex penicillaris*.

Il *Culex Richiardii* punge sopratutto sull' imbrunire ma anche di giorno.

Il *Culex hortensis* punge di giorno (soltanto?)

Quest' ultima specie non s' avvicina mai alle case.

Il *Culex penicillaris* arriva anche alle case, ma preferisce i canneti, le risaie, i prati e i boschi paludosi. Il *Culex malariae* ha i medesimi costumi.

Il *Culex Richiardii* entra più facilmente nelle case, ma preferisce i boschi e punge frequentemente in agosto, come in settembre.

L' *Anopheles claviger* si trova comunissimo nelle case.

Per determinare in modo indiscutibile che i parassiti malarici hanno per oste intermedio le sopradette forme, ho fatto delle ricerche su zanzaroni che avevano succhiato sangue di individui malarici; ma finora ho verificato soltanto la produzione dei corpi flagellati che avrebbero significato se si interpretassero i flagelli, come altri ha fatto, quali spore sciamanti; dispongo però di molto materiale conservato che sezionerò quanto prima.

Dopo i fatti su esposti, tutte le obbiezioni che si potevano fare alla dottrina delle zanzare cadono e possiamo dire invece che questa dottrina spiega

tutti i fenomeni malarici sopratutto se si tien conto delle seguenti altre circostanze. Le zanzare dei paesi malarici, sopratutto il zanzarone, pochissimo si estendono in altezza, sicchè le camere dei secondi e dei terzi piani delle case ne sono pochissime invase donde la notoria salubrità relativa degli appartamenti corrispondenti a questi piani.

In vicinanza del laghetto di Montorfano ho trovato molti zanzaroni, che mancavano affatto a Montorfano, paesello un po' più alto del lago. Nella parte alta del villaggio Alserio non m'è capitato di trovare alcun zanzarone, mentre questa specie non faceva deficienza nelle poche case della parte bassa adiacenti ai prati.

Molto non s'estendono neppure in linea orizzontale, così in Colico non ne trovai alcuno non ostante s'incontrassero già poco fuori di Colico. Nella Campagna Romana orizzontalmente si estendono molto di più.

Ricordando quanto ho già accennato per il *C. penicillaris*, debbo dire che esso sembra allontanarsi dal suo luogo di nascita in certi casi più dell'*Anopheles claviger*.

Con queste circostanze coincide benissimo la diffusione della malaria.

Anche la circostanza che zanzare e zanzaroni palustri pungono a grandissima preferenza al crepuscolo serale, trova riscontro nella cognizione volgare che il crepuscolo serale è ora molto pericolosa in luoghi malarici.

Molto interessanti, sono i seguenti fatti.

Avendo notato che le zanzare dei paesi malarici non mi pungevano, per più di 30 giorni, io m'esposi colla massima imprudenza senza mai avere un attacco malarico, con grande sorpresa di tutti quelli che m'avvicinavano, i quali ritenevano fermissimamente ch'io sarei caduto malato. Dei sei ragazzi, uno de' quali mi seguì per 12 giorni aiutandomi a pigliar le zanzare, un altro per 7 giorni, due altri per 4 giorni e due altri per 2 giorni, nessuno pigliò la malaria. Il primo però fu punto soltanto circa 50 volte dal zanzarone; il secondo circa 20 volte, il terzo circa 5 volte, il quarto 2 volte, il quinto circa 50 volte, e il sesto non fu mai punto. Tutti furono invece punti molte volte dal *Culex penicillaris*. Soltanto il primo ebbe un leggero attacco di febbre, che non si è ripetuta più dietro amministrazione del chinino (l'esame del sangue non si è potuto fare). Sarebbe stato interessante prolungare questo esperimento, ma trovai giusto d'interromperlo.

Tenendo presente che le zanzare palustri e sopratutto il zanzarone, nell'epoca in cui io feci le mie osservazioni pungevano a grandissima preferenza verso sera, tentai la seguente prova. Una donna con tre bambini appartenenti a famiglia che abita in parte a X (paese malarico) e in parte Y (paese non malarico) doveva per ragioni d'affari trasportarsi appunto da Y a X. Cogliendo la bella occasione al balzo, proposi alla donna suddetta di preservar lei e i tre bambini dalle punture delle zanzare, almeno fin dove

era possibile. Essa si sottopose alle mie prescrizioni, che consistevano nel rinchiudersi in una camera dove accendevo parecchi zampironi per circa le 2 ore pomeridiane, in cui le zanzare pungono moltissimo. Prima e dopo non si usava alcuna cautela, tranne quella di evitare possibilmente le punture delle zanzare, allontanandole o riparando con un velo i bimbi quando dormivano. Non ostante tutte le attenzioni, non si è potuto però impedire che uno dei bambini ricevesse per lo meno 4 o 5 punture di *Culex penicillaris*. La prova durò 15 giorni, passati i quali la madre dovendo tornare a Y gentilmente acconsentì a ricondursi seco anche i bambini. La madre e due dei tre bimbi non s' infettarono di malaria. Un bimbo, precisamente quello che ricevette le 4 o 5 punture, al nono giorno dopo che era ritornato a Y, ebbe forse una leggera febbre, all' undicesimo giorno un accesso indiscutibilmente febbrile. Al dodicesimo giorno io esaminai il sangue del bimbo, ma il reperto riuscì negativo. Sarebbe stato interessante seguire ulteriormente questo caso, ma io ritenni mio dovere di amministrare ripetutamente il chinino, senza verificare ulteriormente la natura della febbre che non si è più ripetuta.

In ogni modo la suddetta prova acquista importanza molto grande, quando si pensa che al dodicesimo giorno della prova cadde affetto di febbre malarica un altro bambino della stessa famiglia che si trovava già a Locate, che quest' anno però non aveva avuto febbre, ma che non si era sottoposto alla suddetta cura preventiva ed era perciò stato punto da molte zanzare palustri.

La prova durò dal 27 agosto al 12 settembre. Circa 8 anni fa la stessa donna, presso a poco nella stessa epoca, era venuta a Locate con 4 ragazzi; s' era fermata prezs' a poco 15 giorni tornando a Rovellasca coll' infezione malarica essa e tre dei 4 ragazzi.

In conclusione ritengo che zanzare e zanzaroni palustri nella malaria si comportino come la zecca nella febbre del Texas. Bisogna però tener presente che ben poche zanzare e zanzaroni palustri possono essere infette di parassiti malarici, e infatti la maggior parte di esse punge animali domestici (buoi, cavalli, maiali, cani, piccioni, galline) e uomini sani. Può darsi perciò che una sola puntura di zanzarone o di zanzara palustre ci infetti di malaria, come può darsi che migliaia di punture non c' infettino [1].

Questi fatti aprono il nostro animo alla speranza di poter combattere con nuove armi la malaria che tanto infesta l' Italia. Non è difficile fare tale una distruzione delle larve di zanzare, come dimostrano certe mie vecchie esperienze, da rendere rari questi animali in un dato luogo.

[1] Aggiungerò alcune notizie interessanti. Basta che l' aria sia un po' mossa perchè le zanzare palustri non pungano. Forse i ventilatori elettrici basteranno a preservarci dalle zanzare nei luoghi malarici. Molti fatti tendono a dimostrare che le zanzare hanno un udito finissimo e che chi parla ne viene più facilmente punto.

Debbo ringraziare molte persone che mi aiutarono nelle mie ricerche; faccio fin d'ora peculiare menzione dei dottori Serri, Romanini, del sig. Billitz e dell' ing. Bordiga.

Termino annunciando che i colleghi Celli, Bignami, Dionisi e Bastianelli stanno già facendo sperimenti di molto interesse con le zanzare e i zanzaroni palustri da me determinati.

Fisica. — *Variazione della costante dielettrica del vetro per la trazione meccanica.* Nota I del dott. Guido Ercolini, presentata dal Socio A. Ròiti.

1. In un classico lavoro sul *Principio della conservazione della elettricità* il Lippmann [1] dimostra in generale che applicando all'analisi di un fenomeno elettrico questo principio, insieme coll' altro dell' equivalenza, si ottiene un sistema di due equazioni, distinte e compatibili, che s' interpreta con due leggi fisiche, di cui l' una definisce un fenomeno nuovo, reciproco del fenomeno dato. Come esempio, fra gli altri, applica questo modo d' analisi alle esperienze del Righi [2] sulla deformazione dei condensatori per effetto della carica; e, fondandosi sulla legge, confermata poi da tutti gli sperimentatori, che la dilatazione del dielettrico è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale fra le armature, trova che, sottoponendo a trazione un tubo di vetro armato, la capacità della bottiglia così costituita deve *crescere proporzionalmente al peso tensore.*

2. Una verificazione sperimentale di questa deduzione è stata tentata per la prima volta dal dott. Dessau [3]. Questi adopra nelle sue esperienze due condensatori cilindrici quasi identici fra loro; su di uno esercita una trazione, l' altro gli serve di compensazione alla dispersione che si verifica nel primo sia per conduzione o lungo la superficie del tubo o attraverso di esso, sia per assorbimento nella massa del vetro. Sebbene la compensazione non sia perfetta, pure il fenomeno cercato si manifesta notevolmente e nel senso previsto dalla teoria. Esaminate tutte le cause che possono influire sul fenomeno, il Dessau viene alla conclusione che non può esso attribuirsi unicamente ad una deformazione del condensatore, nè ad una variazione di temperatura o di conducibilità del vetro prodotte dalla trazione; quindi per lui qualitativamente è vera la previsione del Lippmann. Quanto alla proporzionalità fra il peso tensore e quest' aumento, dichiara di non poter concluder nulla, per le grandi difficoltà sperimentali incontrate.

(1) Journal de Physique, 1881, t. 10, pag. 381.
(2) Nuovo Cimento, 1879, t. 6, pag. 205.
(3) Rendiconti Acc. Lincei, vol. III, 1° sem., fasc. 10, maggio 1894.

3. A conclusioni opposte è giunto il dott. O. M. Corbino ([1]), il quale pone a base dei suoi ragionamenti teorici la nota relazione del Maxwell, $n^2 = D$ (1) fra l'indice di rifrazione n di un mezzo e la sua costante dielettrica D, partendo dalla quale egli osserva che:

1°) Una lamina di vetro stirato si comporta otticamente come un cristallo positivo, coll'asse parallelo alla direzione della trazione. Siccome Fresnel ha osservato che nel vetro stirato l'indice di rifrazione ordinario è minore dell'indice primitivo, e Kerr ha poi trovato che l'indice ordinario diminuisce per la trazione, mentre lo straordinario non si altera, ne viene che, stando alla (1), la costante dielettrica del vetro dovrebbe *diminuire* in direzione perpendicolare alla trazione.

2°) I risultati sperimentali del dott. Dessau non sono sicuri, perchè affetti da cause disturbatrici, fra le quali l'aumento della conducibilità del vetro e la variazione probabile della penetrazione delle cariche per effetto della trazione.

3°) D'altro canto il Corbino crede di poter dedurre dalla teoria della deformazione dei condensatori, basandosi sopra le accuratissime misure del prof. Cantone ([2]), che la costante dielettrica deve *diminuire* per la trazione.

Nelle sue esperienze egli adopra due piccoli condensatori piani, uno col vetro da cimentare, l'altro ad aria gli serve a determinare, spostandone un'armatura, il significato della deviazione di un elettrometro del Mascart, che osserva stirando il primo. La carica è prodotta da un rocchetto Ruhmkorff.

Da tre sole esperienze trae la conseguenza: « La cost. diel. d'una lamina di vetro *diminuisce* per la trazione agente perpendicolarmente alla direzione del campo, e la diminuzione è proporzionale alla trazione ».

Questa legge è, secondo lui, d'accordo con la teoria della doppia rifrazione accidentale data dal Neumann, nella quale si viene alla conclusione che il quadrato dell'indice di rifrazione varia proporzionalmente alla trazione.

Il Corbino in ultimo confessa che, per quanto si sia sforzato, e per *parecchio tempo*, di ricercare le ragioni della contradizione col Lippmann, egli non vi è riuscito.

4. Stando la questione in questi termini, mi è sembrato interessante riprendere a studiare l'argomento, tanto dal lato teorico quanto da quello sperimentale; e perciò comincerò ad analizzare prima i ragionamenti, poi le esperienze del Corbino, perchè questi, più che il Dessau, credo lungi dal vero; infine riporterò le mie esperienze, che credo decisive.

È noto ([3]) che tanto l'ipotesi della eterogeneità del dielettrico, quanto l'altra che suppone il dielettrico formato di straterelli alternativamente con-

([1]) Rivista scientifica e industriale, anno 29, n. 8-9, Firenze 1897.

([2]) Rendiconti Acc. Lincei, vol. IV, fasc. 7-8, aprile 1888.

([2]) Houllevigue, *Sur les théories du résidu électrique*. Journal de Phys., 1897, pag. 113.

duttori ed isolanti, non rendono conto della relazione (1). La sola teoria che ne dia ragione è quella ben nota dello spostamento elettrico dovuta al Maxwell, secondo la quale, affinchè la (1) possa applicarsi ad un dato mezzo, si richiede che questo sia un isolante perfetto e che le sue proprietà elettriche siano definite dalla sola cost. diel. Anzi queste sono le condizioni teoriche del mezzo per le quali si stabilisce la (1). Ora, come isolanti, la maggior parte dei solidi sono molto meno buoni dei gas e di alcuni liquidi puri, e fra i solidi il vetro non è certo uno degli isolanti migliori; anzi, pel caso che qui interessa esso gode di una proprietà negativa, poichè si sa che aumenta la sua conducibilità con la trazione; quindi pel vetro stirato la (1) varrà ancora meno che per gli altri solidi, e tanto meno quanto più grande sarà la trazione.

Le definizioni date dal Maxwell alle quantità D ed n si applicano allo stato stazionario del mezzo, cioè al caso in cui il periodo di oscillazione è infinito, e non si ha quindi diritto di applicare la (1) ai casi pei quali il periodo di oscillazione non è più infinito. D'altra parte le più corte onde elettriche si comportano come le onde più lunghe che costituiscono il calore raggiante, e producono dell'energia in seno al dielettrico, attraverso il quale sono trasmesse. In generale si può dire [1] che un dielettrico si comporta, relativamente alle onde elettriche, come la pece sotto le azioni meccaniche, la quale si mostra elastica per forze rapidamente periodiche, mentre è plastica per una forza costante.

Questo diverso contegno dei dielettrici serve a giustificare i risultati non conformi alla teoria elettromagnetica della luce, che furono trovati col noto metodo del Boltzmann applicato alla determinazione della cost. diel. di sfere di vetro, spato d'Islanda, spatofluore, quarzo e selenio.

Un altro fenomeno a cui bisogna por mente avanti di applicare la (1), è la dispersione che spesso avviene tutt'altro che regolarmente, non soltanto in regioni estese, ma anche nei limiti dello spettro visibile. Anzi a produrre la dispersione anomala concorre l'assorbimento, ed è appunto sperimentando sull'assorbimento del vetro che il Pulfrich [2] è portato a concludere come il fatto, in apparenza paradossale, dell'accrescimento del suo indice di rifrazione con la temperatura, sia un puro effetto di dispersione anomala. Offre un esempio di questa dispersione anomala il risultato cui è giunto il professor Mazzotto [3], che, cioè, la cost. diel. del vetro presenta un massimo per la lunghezza d'onda di 45 cm. Se poi si pensa, come osserva il prof. Cardani [4], alla stretta analogia esistente fra la cost. diel. ed il coefficiente di permeabilità magnetica, si ha diritto di credere che l'intensità del campo elet-

[1] Rosa, Philos. Mag., t. 31, 1891.

[2] Wied. Ann., t. 45, 1892.

[3] Rendiconti Acc. Lincei, vol. IV, 1° sem., fasc. 6, 1895.

[4] Rendiconti Acc. Lincei, vol. I, 2° sem., fasc. 2 e 3, 1892.

trico abbia influenza sul valore di quella costante. Infatti egli trova coll'esperienza che nello zolfo essa aumenta coll'intensità del campo.

Similmente il Weber [1] trova che essa per l'aria e l'acido carbonico diminuisce con la forza elettromotrice di carica; per l'etere e il vetro aumenta con la differenza di potenziale.

Per la luce invece, come mostrò l'Ebert [2], l'indice di rifrazione è indipendente dall'intensità luminosa.

5. La teoria della deformazione dei condensatori decide la questione, quando sia rettamente applicata. Infatti le conclusioni della importante Memoria del prof. M. Cantone [3] sono le seguenti:

a) La cost. diel. del vetro dipende solo dalla sua densità come pei liquidi.

b) Un altro risultato importantissimo, se non generale, *almeno pel caso del vetro*, è che la cost. diel. *aumenta* col diminuire la densità.

Ora il vetro, come fece vedere anche sperimentalmente il prof. Cantone in altro suo lavoro [4], è un corpo pel quale il rapporto di Poisson è certamente minore di $\frac{1}{2}$ ($=\frac{1}{4}$), quindi una tensione ne diminuisce la densità, e per conseguenza ne deve *aumentare* la cost. diel.; precisamente come vuole la deduzione teorica del Lippmann.

Il Corbino, nell'apprezzamento dei risultati sperimentali del prof. Cantone, è incorso nel seguente equivoco: egli ha tenuto solo conto del fatto che $\frac{d\vartheta}{dl}$ (rapporto fra l'aumento della costante di polarizzazione ϑ e la contrazione corrispondente nella direzione delle linee di forza) delle formule del Lorberg applicate dal prof. Cantone, è positivo, senza pensare che la variazione di ϑ è quella risultante dalle variazioni relative alle dilatazioni principali. Partendo invece da questa premessa, l'unica compatibile con la teoria seguìta dal prof. Cantone, ne viene che ϑ è funzione della densità, e quindi per la trazione si deve prevedere un *aumento* della cost. diel.

Dopo le conclusioni *a*) e *b*) il prof. Cantone aggiunge: « Il modo come varia questa costante con la temperatura ha fatto ritenere probabile il risultato opposto; se non che le ricerche relative ai coibenti sottoposti a varia temperatura hanno lasciato il dubbio che la diminuzione della cost. diel. al riscaldamento fosse apparente, e fosse invece dovuta ad un aumento di conducibilità. Del resto, ammessa anche tale diminuzione, non viene provato che essa sia effetto della variazione di densità avvenuta nel corpo, potendo benissimo essere effetto del fenomeno calorifico ». A questo proposito farò

(1) Archives de Genève, t. 29, pag. 571, 1893.
(2) Wied. Ann., t. 37, 1887.
(3) Loc. cit.
(4) Rendiconti Acc. Lincei, vol. IV, 1° sem., pagg. 220 e 292.

un' osservazione. È noto (¹) che il Neumann, per la sua teoria della doppia rifrazione accidentale, è partito dalle incomplete formule della elasticità date dal Lamé, ed è perciò giunto a tre equazioni incomplete che contengono due sole costanti. Peraltro, nonostante l' incertezza che regna in tutta la teoria del Neumann, i segni delle due costanti son ben determinati, poichè, se s' introduce nei calcoli del Neumann la relazione fra le dilatazioni che risulta dalle esperienze del Wertheim, relazione che, *almeno pel vetro*, è molto prossima al vero, e poi da quelle, ancora più precise e recenti del Mach (²), si trova per le due costanti lo stesso segno negativo.

Risulta da questo fatto una conseguenza importantissima, che, cioè, se si comprime *uniformemente* (e perciò non esiste contradizione con le esperienze del Fresnel e del Kerr sopra ricordate) un pezzo di vetro, il suo indice di rifrazione deve diminuire; per una dilatazione, al contrario, l' indice deve *aumentare*.

La verificazione sperimentale diretta di questo risultato è impossibile, ma si conferma a sufficienza osservando il cangiamento d' indice del vetro per una debole variazione di temperatura. Se questa variazione è piccola, si può ammettere che essa abbia il solo effetto di dilatare uniformemente il corpo, e quindi solo di diminuirne la densità.

Ora l'Arago, il Neumann stesso ed in ultimo il Fizeau (³) hanno constatato coll' esperienza quest' accrescimento dell' indice del vetro per un leggero riscaldamento.

Dunque anche la teoria del Neumann, là ove mostra una qualche certezza è in contradizione con le conclusioni del Corbino.

6. Quanto alle esperienze, mi sembra che quelle del Corbino non possano decider nulla, poichè basta pensare alla estrema delicatezza ed alla grande difficoltà delle esperienze di elettrostatica in generale, per concludere subito che l' uso in esse del rocchetto Ruhmkorff è tutt' altro che indicato; anzi in nessun caso può essere usato come sorgente costante di elettricità come fa il Corbino.

Nonostante la piccola intensità e le frequenti interruzioni (250 al secondo) della corrente eccitatrice, non si può ammettere, come è necessario se da delicate e difficili esperienze si vogliono trarre risultati sicuri, che agli estremi del secondario si abbiano potenziali uguali e contrarî, e tanto meno che, con questa disposizione, non si abbia assorbimento nel dielettrico. Anzi a quest' ultimo proposito è da notare come il Borel (⁴) trovi che sotto l' influenza di campi elettrici alternativi, l' elettrizzazione residua va crescendo con le sostanze di meno in meno isolanti; ora il fatto che il vetro

(¹) Verdet, Oeuvres, t. 6°: *Optique phys.*, pag. 386.

(²) Pogg. Ann., t. 144, pag. 313, 1872.

(³) Annales d. Chim. et d. Phys., t. 66, 1862.

(⁴) Archives de Genève, t. 30, pag. 45, 1893.

assoggettato a trazione aumenta la sua conducibilità, può far pensare che nel condensatore del Corbino si abbia un residuo sempre maggiore coll'aumentare i pesi tensori.

Secondo la teoria del Maxwell, confermata dalle esperienze del Muraoka (1), più sostanze pure, che prese isolatamente non dànno residuo elettrico, forniscono un residuo se si sovrappongono, purchè una di esse offra una conducibilità apprezzabile. Ora il condensatore del Corbino ha il dielettrico costituito di vetro e di due strati di paraffina; quindi ammesso anche che queste sostanze fossero pure, siccome il vetro stirato offre conducibilità apprezzabile, ne viene che l'assorbimento nel condensatore deve necessariamente esserci.

Un'altra importante causa di disturbo nella disposizione usata dal Corbino, è che con essa si hanno tre capacità dello stesso ordine di grandezza, cioè il condensatore da cimentare, quello ad aria e l'elettrometro; mentre poi la variazione che deve essere misurata è prodotta soltanto sul primo.

Osservando poi che, secondo le esperienze del Naccari (2), del Borgmann (3) e del Houllevigue (4), in un condensatore a residuo si ha un riscaldamento proporzionale al quadrato del campo e al tempo; che, come ha trovato il Borel (5), il residuo elettrico del vetro aumenta molto con la temperatura; che, come dimostra il Gray (6), mentre la resistenza elettrica del vetro diminuisce elevando la temperatura, ma aumenta ritornando alla temperatura primitiva, la sua conducibilità dielettrica invece diminuisce quando è riscaldato e poi raffreddato; che la temperatura del vetro si abbassa per la trazione e quindi, secondo il Cassie (7), la sua conducibilità elettrica diminuisce; che, infine, tutte queste cause di disturbo si verificano solo e contemporaneamente nel condensatore da cimentare, e punto o quasi, in quello ad aria e nell'elettrometro, mi pare si possa ben concludere che le esperienze del Corbino non possono condurre a nulla di decisivo.

In una prossima Nota renderò conto delle esperienze da me eseguite per decidere la questione, e dei risultati sperimentali a cui son giunto.

(1) Wied. Ann., t. 40, pag. 329, 1890.
(2) Nuovo Cimento, t. 12, 1882.
(3) Journal de Phys., pag. 217, 1888.
(4) Id., pag. 210, 1897.
(5) Loco citato.
(6) Phil. Mag., 5ª serie, t. 10, pag. 226, 1880.
(7) Proceedings of the R. Society of London, vol 48, pag. 357, 1889.

Zoologia — *Sulla morfologia dei Diplopodi* [1]. 3ª e 4ª Note preliminari del dott. Filippo Silvestri, presentate dal Socio B. Grassi.

III.

Sviluppo del Pachyiulus communis (Savi).

La segmentazione è di tipo superficiale.

La prima cellula trovasi alla periferia. Questa dà origine per divisione indiretta a due cellule, che si internano nel tuorlo, ma di poco.

Da queste, sempre per divisione indiretta, si originano altre cellule di segmentazione, finchè nel 3° e 4° giorno dalla deposizione se ne riscontrano in un uovo moltissime. Mentre il tuorlo resta insegmentato, si nota che le cellule di segmentazione sono tutte più, o meno vicine alla superficie, mai però del tutto superficiali o periferiche, che si voglia dire. Quest' ultima posizione comincia a notarsi soltanto nel 6° giorno e, continuando questo processo di migrazione alla periferia e la moltiplicazione per cariocinesi, si perviene ad uno stadio, in cui tutta la superficie dell' uovo è rivestita da uno strato di cellule, si ha cioè un blastoderma. Nel tuorlo non resta alcuna cellula di segmentazione.

Nel 7° giorno da varî punti del blastoderma immigrano nel tuorlo delle cellule, le quali alla lor volta moltiplicandosi (cellule del tuorlo) vengono a trovarsi sparse in tutto il tuorlo, che pure si divide, sicchè questo in grosse sezioni appare formato di tante palle, che hanno in mezzo un nucleo circondato da poco protoplasma.

Non ho potuto sorprendere come avviene la divisione di queste cellule del tuorlo, la quale perciò forse sarà diretta. Esse probabilmente rendono il tuorlo assimilabile dalle cellule degli organi in sviluppo.

In un punto del blastoderma, che corrisponde alla faccia ventrale anteriore dell' embrione futuro, verificasi una moltiplicazione delle cellule, che vengono a formare una specie di cuneo costituito nella parte più spessa di 7 od 8 strati di cellule, cuneo sporgente nel tuorlo. Veniamo così a distinguere nel blastoderma due parti, una semplice (blastoderma semplice), e l' altra (blastoderma stratificato).

Gli elementi cellulari sono a questo stadio molto grandi.

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio d'anatomia comparata della R. Università di Roma.

All' 11° giorno, nel cuneo, che si trova al massimo sviluppo, comincia una rapida moltiplicazione delle cellule ed una emigrazione di esse nel tuorlo. Parte di queste cellule, che emigrano arrivano ad addossarsi al blastoderma semplice della faccia laterale e dorsale e daranno origine alla muscolatura, altre restano nel tuorlo e formeranno i globuli del sangue, i corpi linfatici e gli adiposi.

Una gran parte delle cellule del cuneo non emigrano, ma moltiplicandosi rapidamente si estendono per tutta la faccia ventrale del futuro embrione ([1]).

Il blastoderma semplice nella parte dorsale e nelle parti dorso-laterali è fatto di cellule appiattite, quali si riscontrano nell' amnio di varî Artropodi.

A questo stadio il cuneo si è diviso in due parti: una superficiale, continua con il resto del blastoderma, e l' altra profonda, che insieme alle cellule sopradette migrate dal cuneo, si può denominare *meso-entoderma.*

Non si forma un amnio, nè una sierosa; manca l' organo dorsale. Si ha insomma il caso più semplice di sviluppo, in cui tutto l' ectoderma primitivo diventa ipoderma.

Circa al 18° giorno dalla deposizione compaiono lo stomodeo ed il proctodeo per invaginazione dell' ectoderma accompagnati dalle corrispondenti porzioni mesodermiche; il proctodeo ha uno sviluppo maggiore dello stomodeo. L' intestino medio si forma dalla parte mediana del cuneo; non ho potuto esaminare uno stadio in cui non fosse ancora completo, e non posso quindi accertare se ha un' origine bipolare; è però molto probabile perchè in corrispondenza alla parte anteriore ed a quella posteriore presenta due masse di cellule molto grandi mentre nelle parti di mezzo è costituito nei primi stadî da poche cellule. Questo intestino medio è costituito da un tubo solido, solo più tardi si forma nel suo interno un lume per deiscenza, o schizia che si voglia dire.

Ho osservato uno stadio in cui il proctodeo è separato dalla parte posteriore dell' intestino medio, mentre nell' anteriore l' ho trovato sempre aderente allo stomodeo.

I tubi malpighiani nei miei preparati compaiono la prima volta come estroflessioni già ben sviluppate della parte orale del proctodeo.

Il sistema nervoso si accenna pari.

Le trachee si sviluppano molto tardi, in forma di due introflessioni ectodermiche ai lati delle zampe; sono un solo paio per ogni segmento, che però più tardi alla sua volta nei segmenti, che hanno un doppio paio di piedi, si divide in due.

L' accenno degli organi genitali mi si presentò impari e ventrale rispetto all' intestino; esso sembra derivare dal mesoderma.

([1]) Se e quanto vi contribuisce la parte ventrale del blastoderma semplice verrà dimostrato nel lavoro in esteso.

In un giovane embrione prima che si sia formata l' insenatura ventrale distinguiamo: 1° un segmento antennale con un paio di appendici: le antenne; 2° una parte, che trova riscontro nel così detto segmento intercalare di altri tracheati, senza appendici; 3° un segmento mandibolare con un paio di appendici: le mandibole; 4° un segmento mascellare con un paio di appendici: le mascelle; 5° un segmento labiale senza appendici; 6°, 7° ed 8° tre segmenti con un paio di appendici ciascuno, 1°, 2°, 3° paio di zampe; 9° un segmento con due paia di appendici: 4° e 5° paio di zampe; a questo segmento segue una zona generativa, da cui di mano in mano vengono distinguendosi altri segmenti con due paia di appendici. Queste appendici si trovano una accanto all' altra, hanno una base comune e perciò vanno considerate come derivate dalla biforcazione di un sol paio di appendici, venendo così a trovar conferma nei fatti l' ipotesi del Grassi.

Lo gnatochilario è formato dallo sterno del segmento mascellare colle relative appendici e dallo sterno del segmento labiale: lo sterno del segmento labiale corrisponde all' *Hypostoma* di Latzel. Quindi sono tre i segmenti che concorrono a formare l' apparecchio boccale: due forniti anche di arti appendici, il terzo sfornito e ridotto perciò dal lato ventrale allo sterno. Quest' ultimo segmento nella parte dorsale non si è unito alla testa, ma è rimasto libero e costituisce ciò che si chiama *collo* o *primo segmento*.

IV.

Alcuni cenni di anatomia comparata.

1°. In tutti i Diplopodi manca un vaso ventrale; questa scomparsa è in intima relazione con la posizione ed il grande sviluppo del sistema tracheale.

2°. In tutti i Diplopodi esiste un solo paio di tubi malpighiani.

3°. In tutti i Diplopodi esiste un solo paio di glandole salivali tubulose.

4°. In tutti i Diplopodi le trachee hanno un' intima spirale.

5°. Nei *Limacomorpha*, *Monocheta*, *Coelocheta* gli sterniti di uno stesso segmento hanno una forma tra di loro disuguale, come disuguali sono le tasche stigmatiche.

6°. Nei *Colobognatha* a causa della riduzione del capo il ganglio sopraesofageo si è ripiegato all' indietro e viene a trovarsi in corrispondenza al 3° segmento del tronco.

7°. I *Lophoproctidae* non hanno allo gnatochilario i processi palpiformi, che si riscontrano nei *Polyxenidae*.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
dal 5 settembre al 2 ottobre 1898.

Arcangeli G. — Sopra tre casi di avvelenamento per funghi; Sull'*Amanita verna*, e sui provvedimenti da prendersi contro i funghi tossici. Pisa, 1898. 8°.

Belloc L. — Notizie storiche sul R. Museo industriale italiano in Torino. Torino, 1898. 8°.

Campion H. — The Secret of the Poles. Birmingham, 1898. 8°.

Carazzi D. — Sulle funzioni dei canali semicircolari del vestibolo e del nervo vestibolare. Firenze, 1898. 8°.

Caruso G. e *Gasperini G.* — Osservazioni e ricerche sperimentali dei fermenti puri selezionati nella vinificazione. Firenze, 1898. 8°.

Catalogo della Biblioteca della Società degli ingegneri e degli architetti italiani. 1898. Roma, 1898. 8°.

Gegenbaur C. — Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere mit Berücksichtigung der Wirbellosen. Bd. I. Leipzig, 1898. 8°.

Jatta G. — Sopra alcuni Cefalopodi della Vettor Pisani. Napoli, 1898. 8°.

Lussana S. — Sul calore specifico dei gas. Mem. IV, 2. Pisa, 1898. 8°.

Marson L. — Sui ghiacciai del massiccio del Monte Disgrazia o Pizzo Bello. — Sui ghiacciai italiani del Bernina proprio. Roma, 1898. 8°.

Raddi A. — Lo stato attuale della spiaggia ligure di Chiavari ed i mezzi della sua difesa. Chiavari, 1898. 8°.

Urzi G. — Un caso particolare del problema della rotazione di un corpo solido di rivoluzione sospeso per un punto del suo asse di simmetria. Napoli, 1897. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 16 ottobre 1898

Fisica. — *Variazione della costante dielettrica del vetro per la trazione meccanica.* Nota II del dott. G. Ercolini, presentata dal Socio A. Ròiti.

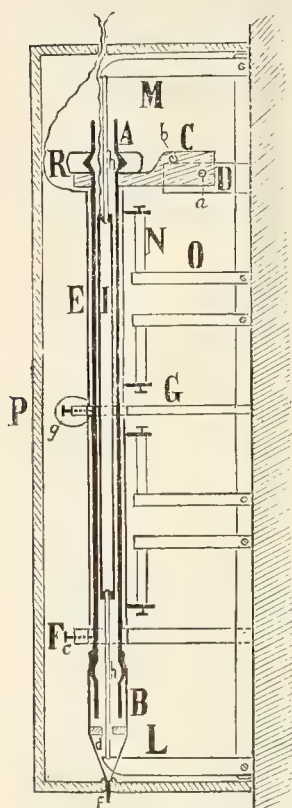
7. Per decidere sperimentalmente in modo che non lasci dubbio, se sia conforme al vero la deduzione del Lippmann che la capacità d'un condensatore aumenti proporzionalmente alla trazione esercitata sul dielettrico, mi pare debbano essere soddisfatte le seguenti condizioni:

a) Le armature del condensatore da assoggettare a trazione devono essere a distanza dal vetro, affinchè si possa escludere l'assorbimento elettrico e la conduzione attraverso il vetro stesso.

b) L'elettrometro, atto a manifestare le piccolissime variazioni di capacità che si tratta di misurare, dev'essere sensibile il più possibile e deve avere la più piccola capacità possibile.

Di più, per eliminare la perturbazione dovuta ad un cambiamento di temperatura del vetro per la trazione, bisognerà che le deviazioni dell'elettrometro siano durature.

Per la prima condizione s'incontra la difficoltà di mantenere fermo, rispetto alle armature, il dielettrico quando si assoggetta alla trazione. A tutto rigore può dirsi impossibile il conseguire un tale intento, ma dopo non pochi tentativi sono riuscito ad avvicinarmici tanto da render ben sicuri i risultati. Da principio ho adoperato lastre di vetro, ma riuscita vana ogni cura, le ho abbandonate per dei tubi, e, dopo non poche prove, son giunto ad una disposizione che mi ha sodisfatto.

Ad una robusta canna di vetro di Turingia *AB* del diametro medio interno di mm. 17,5 e del diametro esterno di mm. 22, ho fatto, presso le estremità ed alla distanza fra loro di cm. 130, due rigonfiamenti; quello superiore, molto regolare, l' ho rinchiuso con precauzione in un grosso *raccordo Regnault R*, che lo abbraccia completamente e lo tocca in ogni punto. Il raccordo *R* posa sopra un robusto anello di ferro *C*, che può fissarsi alla sbarra murata *D* mediante un bulone *a* ed una spina conica, la quale, spinta più o meno nel foro *b* a contrasto con lo spigolo superiore di *D*, permette di ridurre *C* più o meno inclinato, per rendere la canna ben verticale.

Al di sopra del rigonfiamento inferiore si trova un anello *F* murato, che, mediante tre viti *c*, serve a tenere la canna in una posizione determinata. Su questo rigonfiamento la canna ha una forte legatura, da cui partono sei capi di corda, tenuti prima discosti da un anello *d* e che vanno poi a riunirsi in *f*, ove è attaccato un uncino che porta un piatto sul quale si mettono con precauzione i pesi tensori.

Messa verticale la canna, affinchè il rigonfiamento superiore si adattasse bene in *R*, caricai il piatto con un peso maggiore di quello a cui volevo giungere colle esperienze, cioè con oltre 120 kg., e ve li lasciai per qualche ora. Tolsi poi i pesi, e, fissando con un cannocchiale la canna, non potei scorgere direttamente spostamenti di sorta ogni qualvolta caricavo il piattello di 20 kg., fino a giungere di nuovo ai 120 kg. Non bastando questo a convincere che la canna fosse assolutamente ferma, ricorsi ad una disposizione molto più sensibile, costituita di un sistema di due leve ad angolo retto fra loro, che spostavano due specchietti davanti ai quali era un cannocchiale con scala. Per mezzo di questa disposizione, con la quale 1 cm. della scala corrisponde, al più, ad uno spostamento della canna di mezzo millesimo di mm., ho veduto che il mezzo della canna soffre degli spostamenti abbastanza grandi ogni qual volta si carica il piatto di 20 kg., mentre le estremità sono molto più immobili. Perciò ho aggiunto un altro anello *G*, il quale, mediante le viti *g*, mi ha servito a tenere la canna nella stessa posizione in cui si trova quando è caricata dal massimo peso. In tal caso il massimo spostamento della canna non supera mai un cm. e mezzo della scala.

Volendo vedere se questo piccolo spostamento ha influenza sulle determinazioni che desideravo eseguire, con una trazione laterale di 1 kg. e con una di 3 kg., ho artificialmente prodotto due spostamenti della canna; nel primo caso ho osservato una deviazione di 20 cm. circa della scala, col se-

condo le imagini uscivano fuori delle scale. Se ad esperienze montate, esercitando le stesse trazioni laterali, l'elettrometro accuserà una deviazione, potrò vederne l'ordine di grandezza e giudicare se gli spostamenti massimi di 1,5 cm. che ottengo caricando la canna con 20 kg., possono o no influire sui risultati.

L'armatura interna *I* del condensatore è costituita da una canna d'ottone del diametro esterno di mm. 14, lunga cm. 100 isolata dalle mensole *M* ed *L* che la sostengono mediante lunghe bacchette *h* di flint.

L'esterna *E* è costituita da due pezzi di canna d'ottone di cm. 60 l'uno, tagliati prima secondo due generatrici, e poi rimessi insieme attorno alla canna *AB*, dalla quale distano uniformemente di circa 2 mm.; sono sostenuti dalle mensole *O* e da esse isolate mediante lunghi cilindri *N* di mastice del Palmieri.

Il tutto è rinchiuso in una cassa di legno *P* ricoperta di stagnola in comunicazione col suolo, e entro la quale trovasi una dozzina di bicchieri con acido solforico.

8. Alla seconda condizione ho sodisfatto adoperando l'elettrometro di Hankel, munito di microscopio, il quale ad una sensibilità grandissima unisce il pregio d'una piccolissima capacità. Per portare i piatti dell'elettrometro a potenziali costanti ho adoperato due pile a secco, un polo delle quali è stato sempre al suolo; per caricare il condensatore mi sono servito d'una batteria di 300 elementi zinco-rame-acqua, posta su isolatori del Mascart. L'elettrometro è protetto da un largo schermo metallico in comunicazione col suolo.

Prima di eseguire le esperienze ho voluto provare se gli spostamenti laterali, artificialmente prodotti, hanno influenza sull'elettrometro, ed ho veduto che, con tutte le disposizioni usate poi nel corso delle esperienze, la massima deviazione della foglia dell'elettrometro, prodotta da una tensione laterale di 3 kg., non è mai superiore ad una divisione piccola del micrometro oculare; il peso di 1 kg. non produce deviazione apprezzabile, ed a più forte ragione non può esser visibile quella prodotta dal massimo carico longitudinale.

Può peraltro nascere il dubbio che per lo stiramento la canna si elettrizzi sensibilmente, ed alteri perciò i risultati; ma dirò subito che non ho mai avuto segno alcuno di deviazione della foglia, sia che le armature scariche fossero riunite fra loro e coll'elettrometro, sia che una sola comunicasse coll'elettrometro e l'altra fosse a terra.

Ogni dubbio così è tolto.

9. Nelle esperienze ho usato due metodi, col primo dei quali l'armatura *E* del condensatore è in comunicazione col polo positivo della pila Volta, l'altro polo della quale è a terra; l'interna *I* colla foglia dell'elettrometro, del quale il piatto destro è unito al polo positivo della pila a secco, il sinistro col negativo. Messa prima a terra la foglia — ciò che facevo abbassando al

di qua dello schermo metallico una leva di rame in comunicazione col suolo — poi isolatala, attacco i primi 20 kg. e osservo la deviazione della foglia. Annullo questa deviazione mettendo di nuovo al suolo, poi isolo, aggiungo altri 20 kg., osservo la deviazione e così di seguito fino a 100 kg. A questo punto, annullata l'ultima deviazione ed isolata la foglia, tolgo 20 kg. ed osservo la deviazione, l'annullo, poi tolgo altri 20 kg., osservo di nuovo, e così via fino a scaricare del tutto la canna. Ripeto le esperienze non mettendo mai la foglia al suolo, e volta per volta osservo l'aumento delle sua deviazione. Giunto anche qui ai 100 kg. ritorno indietro togliendo i pesi, ed ogni volta osservo la diminuzione nella deviazione.

Raccolgo nelle seguenti tabelle i risultati ottenuti con questi due modi di eseguire le esperienze, nelle quali ogni dato è la media d'una ventina di serie d'osservazioni concordanti e perciò ha due cifre decimali:

P	Deviazione	d	P	Deviazione	δ
kg. 20	Sinistra	7,91	kg. 20	Sinistra	8,04
» 40	»	7,42	» 40	»	15,57
» 60	»	6,68	» 60	»	22,22
» 80	»	5,76	» 80	»	28,08
» 100	»	4,93	» 100	»	33,11
» 80	Destra	5,67	» 80	»	28,01
» 60	»	6,52	» 60	»	22,14
» 40	»	7,21	» 40	»	15,43
» 20	»	8,01	» 20	»	8,03

dove P è il peso in kg., d e δ rappresentano il numero delle divisioni del micrometro oculare.

Ripeto poi queste serie d'esperienze sia mettendo al suolo il polo positivo della pila di Volta e caricando col negativo l'armatura E, sia caricando, prima positivamente e poi negativamente, l'armatura interna I e tenendo l'esterna in comunicazione con la foglia dell'elettrometro. Ripeto infine queste otto serie d'esperienze scambiando fra loro i piatti dell'elettrometro.

Col secondo metodo invece l'armatura al potenziale zero del condensatore è in comunicazione con un piatto dell'elettrometro di cui l'altro è a terra; la foglia è unita ad un polo della pila a secco e l'altra armatura del condensatore comunica con un polo della pila di Volta. Ripeto le sedici serie d'esperienze nel modo sopra descritto, ed ottengo risultati concordanti fra loro e coi precedenti.

Dunque si vede che, operando in tutti i modi possibili a potenziale costante, l'armatura isolata, con la trazione del coibente, assume un potenziale

del *medesimo segno* dell' altra; questo vuol dire che la capacità del condensatore *aumenta*.

L' elettrometro, usato in tutte le esperienze a sensibilità costante, è stato accuratamente tarato ed ogni divisione corrisponde alla differenza di potenziale di 0,01 volta. Le sue deviazioni sono esattamente proporzionali alle differenze di potenziale. Quelle ottenute nelle esperienze sono restate costanti per molto tempo. La temperatura dell' ambiente è variata di pochi gradi.

Come riprova ho voluto sperimentare a carica costante, e perciò ho messo l' armatura esterna del condensatore in comunicazione colla foglia dell' elettrometro, il piatto destro del quale è unito al polo positivo della pila a secco, il sinistro al negativo. L' armatura interna I vien caricata per un tempo sufficiente, unendola al polo positivò della pila di Volta. Messa prima al suolo la foglia, poi isolatala, ho attaccato i pesi ed ho avuto sempre una deviazione a *destra*, che, com' era prevedibile, è risultata sempre minore delle analoghe fatte a potenziale costante; cioè l' armatura scarica assume un potenziale *di segno contrario* a quello della caricata. Anche questo conferma l'*aumento* di capacità con la trazione.

Ho voluto vedere inoltre quel che accade aumentando considerevolmente i pesi tensori fino a rompere la canna; per ciò, terminate tutte le esperienze, l' ho sovraccaricata e, con la prima disposizione descritta, ho avuto i seguenti risultati:

P	Deviazione	*d*
kg. 100	Sinistra	4,8
» 120	»	4,5
» 140	»	4,3
» 160	»	4,4
» 180	»	4,3

L' aggiunta di altri 20 kg. ha determinato la rottura delle corde, in modo che, per l' urto ricevuto, la canna si è spezzata verso l' estremità inferiore.

Come si scorge dalle quattro ultime esperienze, pare che la deviazione finisca per rimanere costante.

10. Dall' esame dei risultati sopra riportati si osserva che l' aumento di capacità non è proporzionale al peso tensore, ma in principio gli aumenti sono maggiori che in seguito.

Si potrebbe pensare che sulle deviazioni dell' elettrometro abbiano influenza, oltre che l' aumento di capacità dovuto alla variazione della costante dielettrica, anche altre cause. Una diminuzione *sensibile* di capacità

per l'assottigliamento del tubo dovuto alla trazione, quand'anche potesse invocarsi (1), non avrebbe influenza, poichè sarebbe proporzionale al peso. Non sarebbe proporzionale al peso tensore l'effetto di un eventuale raddrizzamento della canna la quale, per quanto si usi ogni cura nello sceglierla, non sarà mai rigorosamente diritta; ma tale raddrizzamento farebbe diminuire sulle prime il tratto delle linee di forza compreso nel dielettrico solido, operando sull'elettrometro in senso inverso all'aumento di capacità, e quindi non potrebbe dar ragione dei risultati che si scostano per difetto della legge di proporzionalità.

Dunque, prescindendo dal caso molto improbabile che i pesi rendano la canna meno diritta, ed avendo escluso, come ho dimostrato più sopra, ogni spostameno laterale, credo che il fatto possa spiegarsi nel seguente modo:

Il Lippmann nella sua Memoria (2) stabilisce le equazioni:

$$(a) \qquad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial p} \qquad \text{dove} \qquad h = \frac{\partial l}{\partial x} \qquad (b)$$

indicando con l la lunghezza del dielettrico, con x la differenza di potenziale, con c la capacità del condensatore, e con p il peso tensore. Ed ammettendo che sia:

$$\Delta l = \frac{1}{2} \mathrm{K} x^2 \qquad (c)$$

secondo le esperienze del Righi, giunge alla relazione:

$$c = c_0 + \mathrm{K} p$$

che stabilisce la proporzionalità fra l'aumento di capacità e il peso tensore.

Ma è da osservare che il prof. Righi stesso pensa che la legge (c) da lui verificata, in limiti un po' ristretti, possa non esser rigorosa, e quindi che siano accettabili i risultati delle esperienze del Quincke (3), il quale trova pel vetro di Turingia e pel flint deformazioni crescenti alquanto più rapidamente di quello che richiede la legge medesima.

Ora dalle mie esperienze risulta che la variazione di capacità in principio aumenta meno rapidamente del peso tensore, cioè la curva rappresentativa dei miei risultati volge la sua concavità verso l'asse delle ascisse, se su questo si contano i pesi.

Ma le equazioni (a) e (b) dànno la relazione:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial p}.$$

(1) Il Mascart osserva che questa diminuzione di capacità può trascurarsi. Vedi *Électricité et Magnétisme*, vol. I, 2a edizione, pag. 117, 1896.

(2) Annales de Chim. et de Phys., vol. 24, 5a série, p. 163, 1881.

(3) Wied. Ann., Band. 10, p. 161, 1880.

Se si tracciano le curve dei principali risultati forniti dal Quincke nella tabella 10ª (p. 190, l. c.), prendendo per ascisse i potenziali dedotti dalla tavola di Heydweiller [1], corrispondenti alle varie distanze esplosive, e per ordinate le deformazioni, queste curve rivolgono la convessità verso l'asse delle ascisse. Desumendo graficamente da queste, le rappresentazioni delle derivate seconde, $\frac{\partial^2 l}{\partial x^2}$, si ottengono delle curve che, salvo alcune irregolarità per potenziali superiori ai 15 mila volta, potenziali ai quali le cause di errore provenienti da dispersione si fanno molto sentire, rivolgono la loro *concavità* verso l'asse delle ascisse, ed in generale ad esso si avvicinano. Del tutto simile a queste è la curva rappresentativa delle derivate prime $\frac{\partial c}{\partial p}$, che si deduce dai miei risultati.

Si vede dunque che le mie esperienze possono andare d'accordo con quelle del Quincke.

Concludendo, resta verificata, con tutta la sicurezza desiderabile, la deduzione teorica del Lipmann, che, cioè: « La costante dielettrica del vetro stirato *aumenta* con la trazione ».

La proporzionalità fra quest'aumento e il peso tensore si verifica tanto meglio, quanto più grande è il peso, ma in principio è in difetto: e questo è in accordo con le esperienze del Quincke.

Sento il dovere di ringraziare il prof. Ròiti dei consigli che mi ha dato, e dei mezzi che ha messo a mia disposizione.

Fisica. — *Sui raggi catodici, sui raggi Röntgen e sulla grandezza e la densità degli atomi* [2]. Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

Allorchè il Crookes espose la sua teoria della materia radiante, secondo la quale i raggi catodici erano costituiti da molecole elettrizzatesi negativamente a contatto del catodo e muoventisi in linea retta, prima per effetto della ripulsione che subivano da esso e poscia per inerzia, una delle principali obbiezioni a questa teoria fu che queste molecole non avrebbero potuto continuare a muoversi in linea retta, cioè senza urtare nelle altre molecole ed essere deviate, che per un tratto in media molto piccolo, uguale alla media corsa rettilinea delle molecole, la quale invece dalla teoria cinetica dei gas risultava molto minore della distanza a cui pervenivano i raggi catodici.

[1] Wied. Ann., Band. 48, 1893.

[2] Lavoro eseguito nel Gabinetto fisico dell'Università di Cagliari. Settembre 1898.

Ora che dall' esperienze di J. J. Thomson, Willy Wien, Lenard [1] pare dimostrato che i raggi catodici sono bensì costituiti da particelle elettrizzate negativamente e muoventisi in linea retta per le suddette ragioni, ma che queste particelle hanno dimensioni molto minori di quelle d' una molecola (poichè possono attraversare una lamina solida affatto impermeabile a qualsiasi gas) e si muovono con velocità poco minore di quella della luce, la suddetta obbiezione non ha più valore, e la lunghezza della media corsa rettilinea delle particelle dei raggi catodici non può essere identica con quella delle molecole.

Un paragone fra i risultati delle due teorie parrebbe invece possibile, qualora si determinasse secondo ciascuna di esse la somma delle sezioni delle molecole contenute in 1 cm^3 e quindi le dimensioni d' una singola molecola, le quali parrebbero dover essere indipendenti dal modo col quale vengono determinate. I valori di esse dati dalla teoria cinetica dei gas sono noti, e nel caso dei raggi catodici la proporzione di questi che viene assorbita da uno strato gassoso, ossia che urta contro le molecole che lo compongono, dipende certamente dalla somma delle sezioni di esse, la quale può essere dedotta con un semplice ragionamento.

Questo modo di determinare tale somma ha su quello dedotto dalla teoria dei gas, il vantaggio d' una semplicità molto maggiore sia nel processo che si considera che nel ragionamento relativo, e la somma delle sezioni delle molecole viene dedotta con rigore pressochè geometrico.

Però i valori così ottenuti differiscono grandemente ed essenzialmente da quelli dati dalla teoria dei gas; la ragione di tale differenza sta certamente in ciò che le dimensioni delle molecole (come p. es. quelle del sistema solare) non hanno per sè un valore definito e dipendono quindi dal modo di definizione che noi adottiamo e dall' agente di cui ci serviamo per determinarle. Così nella teoria cinetica dei gas, considerando le molecole come corpuscoli somiglianti a quelli che cadono sotto i nostri sensi, si ammette che essi vengano a contatto al momento dell' urto, si ammette altresì che nei liquidi le molecole siano pressochè a contatto mentre è chiaro che in entrambi i casi esse si avvicineranno solo tanto quanto lo consentono la velocità propria e le forze che agiscono su di esse.

Non credo però che ciò tolga interesse alla determinazione della grandezza delle molecole per mezzo dei raggi catodici, perchè anzi così si può giungere a deduzioni importanti sulla costituzione di esse, e si può anche sperare un ulteriore progresso in tale direzione, senza abuso di considerazioni ipotetiche.

Si ammette generalmente che la materia è discontinua (o almeno non omogenea) e costituita da particelle isolate (o differenti in qualche modo dal

[1] Philosophical Magazine, ottobre 1897; Verhandl. der phys. Gesellsch. zu Berlin, 16, 1897; Wied. Ann., t. 64, p. 279, 1898.

mezzo che le circonda) e che esse siano dotate di movimento molto rapido, e di azione reciproca. Però niente prova che queste particelle abbiano un contorno determinato, durezza ed altre qualità simili a quelle dei corpi sensibili, ed anzi appare sempre più probabile che esse siano costituite da centri di forza o di movimento; del resto data l'estrema piccolezza di tali particelle, entrambe le ipotesi sono equivalenti nei risultati.

Tanto pei corpi solidi come per le molecole o per gli atomi, dal punto di vista sperimentale dobbiamo considerare come dimensioni di essi in una data direzione la distanza minima a cui si possono avvicinare in quella direzione le estremità d'un mezzo, senza che esso venga modificato sensibilmente, o almeno in modo che esso venga modificato fino ad un determinato grado. Così nel caso d'un corpo di dimensioni visibili, il mezzo misuratore può consistere nelle due branche d'un compasso, o in due raggi di luce ecc.; nel caso delle molecole e della teoria dei gas il mezzo suddetto è costituito dalle molecole stesse che si avvicinano fino ad essere in media deviate ugualmente, e nel caso considerato in questa Nota il mezzo misuratore è dato dai raggi catodici.

Se gli atomi fossero centri di forza o di movimento, senza contorni definiti, le loro dimensioni sarebbero indeterminate, ma la determinazione delle dimensioni supposte, con varî mezzi, potrebbe dare l'intensità del campo d'azione a varie distanze; se invece gli atomi avessero un nucleo a contorni definiti ma tuttavia fossero circondati, come è molto probabile, da un intensissimo campo d'azione (tale da far cambiare di senso entro un breve spazio la grandissima velocità delle molecole), noi potremmo determinare le dimensioni di questo nucleo solo quando disponessimo d'un mezzo che non fosse soggetto a tale azione, ma avremmo dei risultati tanto più prossimi al vero quanto meno soggetto fosse esso mezzo all'azione suddetta. Sotto questo rispetto i raggi catodici che muovendosi con velocità enorme subiscono tale azione per un tempo minimo, sarebbero in condizioni favorevoli all'esattezza della misura, e tanto più favorevoli quanto maggiore fosse la velocità stessa.

Ciò posto, si abbia un fascio di raggi catodici paralleli ed uniformemente distribuiti, dei quali trascuriamo provvisoriamente le dimensioni trasversali, e sia Q per cm^2 il numero di essi che attraversa un piano perpendicolare alla loro direzione, e Q' per cm^2 il numero di essi che attraversa senza deviazione un secondo piano parallelo al primo e situato ad l cm. di distanza da esso nella direzione del movimento dei raggi. Se supponiamo che le molecole contenute fra i due piani siano proiettate normalmente su uno di essi e sia S per cm^2 l'area occupata dalle proiezioni ed $1 - S$ l'area rimasta libera, la porzione di raggi catodici che cadrà nella prima di queste

aree sarà trattenuta o deviata e quella che cade nella seconda passerà liberamente e formerà la porzione Q', e si avrà:

$$\frac{Q - Q'}{Q'} = \frac{S}{1 - S} \quad \text{ossia} \quad \frac{Q'}{Q} = 1 - S$$

Per trovare il valore di S, essendo N il numero di molecole per cm^3 e σ l'area della proiezione d'una singola molecola, supponiamo d'aggiungere un numero relativamente piccolissimo di molecole dN a quelle considerate, esse si distribuiranno uniformemente (senz'altra regola) nello spazio ad esse offerto, e le loro proiezioni si distribuiranno pure uniformemente sul piano di proiezione, senza che queste proiezioni delle molecole aggiunte, a causa del loro piccol numero, possano sovrapporsi sensibilmente l'una all'altra. Esse occuperanno quindi un'area totale $l\sigma dN$ che si ripartirà sulla parte libera del piano e sulla parte già occupata dalle precedenti proiezioni, proporzionalmente alle aree rispettive, e quest'ultima parte verrà così aumentata d'una quantità:

$$dS = l\sigma dN(1 - S)$$

da cui si ricava $\log(1 - S) = - lN\sigma$, $1 - S = e^{-lN\sigma}$, e:

$$\frac{Q}{Q'} = e^{lN\sigma}.$$

In tal modo misurando le intensità di Q e di Q', che si potranno dedurre dalla intensità della fluorescenza prodotta, o dell'azione elettrica, fotografica, meccanica, o dell'emissione di raggi Röntgen, si può avere in modo semplice e diretto il valore di $N\sigma$ ossia la somma delle proiezioni di tutte le molecole contenute in 1 cm^3.

Se fosse ϱ' il raggio delle particelle dei raggi catodici e fosse ϱ quello supposto delle proiezioni delle molecole, siccome la particella catodica passerà liberamente quando il centro di essa passi distante di $\varrho + \varrho'$ dal centro della molecola, bisognerà prendere $\sigma = \pi(\varrho + \varrho^1)^2$.

Se i raggi catodici anzichè paralleli, fossero divergenti da un punto, i ragionamenti e le relazioni precedenti sussisterebbero purchè s'intendessero Q, Q', S riferiti ad una sfera di raggio qualsiasi preso per unità; se invece Q e Q' si volessero riferiti al cm^2 delle superficie delle sfere che essi attraversano di raggi R ed R', s'avrebbe:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{R'^2}{R^2} e^{N\sigma(R'-R)} \qquad e^{N\sigma(R'-R)} = \frac{R^2}{R'^2} \cdot \frac{Q'}{Q}.$$

Lenard [1] ha adottato e dimostrato coll'esperienza una formula simile, nella quale invece di $N\sigma$ trovasi una costante empirica a della quale egli

[1] Wied. Ann., t. 56, p. 255.

ha determinato il valore con grande accuratezza e per un gran numero di sostanze solide e gassose a pressioni diverse. Egli usava raggi divergenti, ed invece di determinare direttamente i valori di Q, e Q′, determinava la distanza a cui cessava d'esser visibile la fluorescenza da essi prodotta quando attraversavano la sostanza di cui cercava il potere assorbente, oppure il vuoto più perfetto pel quale $a = 0$. Questo metodo è molto sensibile e rende apprezzabili frazioni minime della radiazione incidente.

Una grave obbiezione riguardo all'uso della formula che dà $N\sigma$ sta in ciò che secondo l'esperienze di Lenard i raggi catodici nell'aria atmosferica alla pressione ordinaria non si muovono in linea retta ma si diffondono anche lateralmente, come la luce in un mezzo torbido; cioè i raggi catodici dopo aver urtato in una molecola continuano nel loro movimento, sebbene con direzione cambiata, e dopo varî urti possono così giungere sullo schermo fluorescente e confondersi coi raggi che vi sono giunti senza deviazione, dei quali unicamente tien conto il ragionamento precedente. Così può parere molto probabile che nell'esperienze di Lenard lo schermo appena fluorescente sia reso tale dai raggi catodici diffusi pei quali non vale la relazione suddetta. Così nel caso dell'aria nebbiosa o dell'acqua lattiginosa, la quantità notevole di luce ordinaria che le attraversa si compone unicamente di raggi diffusi.

Tuttavia mi pare che quest'obbiezione non abbia tutto il peso che dimostra a prima vista. Difatti, anzitutto il caso della luce ordinaria, moto ondulatorio, è essenzialmente diverso da quello dei raggi catodici; nel primo caso solo una piccolissima porzione di energia luminosa va perduta (trasformata in energia termica) nelle varie riflessioni e quindi la quasi totalità deve per una via più o meno tortuosa uscire dal mezzo torbido; inoltre le particelle di nebbia o lattiginose sono trasparenti, quindi una gran parte della luce che attraversa la nebbia penetra attraverso le particelle che la compongono, ed essa risulterebbe molto diminuita qualora tali particelle fossero opache, come nel caso del pulviscolo di mercurio che si ottiene scuotendo violentemente il mercurio in un liquido.

Inoltre è da notare che i raggi catodici che urtano contro la parte centrale d'una molecola saranno trattenuti o deviati talmente e con tale perdita d'energia, che non potranno affatto giungere sullo schermo o produrvi un effetto sensibile; mentre i raggi che urtano o attraversano la parte periferica della molecola, qualora dopo varî urti giungessero tutti sullo schermo e venissero considerati come raggi diretti, non produrrebbero altro effetto che di far apparire un po' minore il raggio della molecola; siccome però essi sono diffusi in tutte le direzioni e solo una parte di essi potrà giungere sullo schermo, e siccome inoltre nei successivi urti avranno subìto una perdita d'energia, pare probabile che l'errore causato dalla loro presenza sia molto piccolo.

Finalmente è da notare che Lenard ha ottenuto risultati paragonabili tanto dalle esperienze sui gas a pressione ordinaria che per quelli rarefatti

nei quali la diffusione dei raggi catodici è molto meno pronunziata, o anche affatto insensibile.

Ritengo perciò che l'errore derivante dall'effetto dei raggi diffusi sia piccolo; sarebbe facile però di evitarlo completamente, supposto che sia sensibile, perchè i raggi diretti si possono distinguere dai raggi diffusi per la proprietà di produrre sullo schermo fluorescente ombre a contorni netti degli oggetti interposti, e di produrvi l'immagine della sorgente d'emissione qualora s'interponga invece uno schermo con un forellino. Feci qualche tentativo in tale direzione, ma finora con mezzi troppo inadeguati per poter ottenere un risultato decisivo.

Una proprietà molto notevole trovata dal Lenard e da lui dimostrata con un gran numero di esperienze svariate, su corpi in condizioni diversissime, consiste in ciò che il loro potere assorbente pei raggi catodici non dipende menomamente nè dal peso molecolare o atomico di essi, nè dal loro stato fisico, ma dipende solo dalla loro densità ed è proporzionale ad essa (facendo astrazione da alcune irregolarità lievi, ma che non si possono attribuire ad errori di esperienze).

Da ciò derivano varie conseguenze interessanti; se in un gas o in una miscela di gas, rimanendo immutato il volume, le molecole o gli atomi si unissero n ad n formando molecole più complesse, costituite ciascuna da n molecole primitive, oppure venissero a scambiarsi gli atomi, il potere assorbente del gas, ossia la somma delle proiezioni delle molecole contenute in 1 cm^3 rimarrebbe invariato, quindi l'area della proiezione d'una molecola risultante sarebbe uguale alla somma delle proiezioni delle molecole o degli atomi componenti; perchè ciò avvenga è necessario che la molecola risultante si componga di parti isolate di dimensioni piccole rispetto alla distanza reciproca, ed una costituzione simile deve essere ammessa per qualsiasi molecola: i raggi catodici poi avrebbero la facoltà di penetrare liberamente fra queste parti costituenti delle quali potrebbero fornire le dimensioni, nel modo sopraindicato.

Inoltre siccome 1 cm^3 di un corpo qualunque ridotto allo stato gassoso e composto di molecole biatomiche di peso molecolare $2p$, ha la massa, e quindi il potere assorbente p volte maggiori di quelle di 1 cm^3 d'idrogeno alla stessa pressione e temperatura ed ha altresì un ugual numero di molecole e di atomi, ne segue che l'atomo di questo corpo non solo ha la massa ma anche l'area della proiezione su un piano qualsiasi, p volte maggiori di quelle dell'atomo d'idrogeno. Appare quindi molto probabile che gli atomi dei corpi si compongano di parti isolate situate a distanza molto grande rispetto alle loro dimensioni, e che queste parti siano le stesse per tutti gli atomi, ma si trovino in ciascun atomo in numero proporzionale al suo peso (1).

(1) A questa deduzione dall'esperienze di Lenard ha accennato già il Thomson nella Memoria citata.

L'ipotesi di Prout che era basata sul fatto che i pesi atomici sono spesso multipli interi di quelli dell'idrogeno, riceve così una importante conferma visto che la stessa relazione vale anche per le proiezioni di essi atomi; siccome però tale multiplicità non si verifica nè sempre nè rigorosamente, bisogna ammettere che anche l'idrogeno sia composto di un gran numero di parti. Se i pesi atomici fossero noti con rigore matematico, il loro massimo comun divisore darebbe il peso d'una parte costituente e quindi il numero di parti di cui è costituito ciascun atomo, ma niente proverebbe d'altronde che questa parte fosse semplice.

Dalla suddetta proprietà risulta altresì che i raggi catodici possono penetrare e traversare anche fra le parti costituenti dell'atomo chimico (le quali potranno esser chiamate atomi fisici) di cui la formula precedente potrebbe darci il raggio se ne conoscessimo il numero; difatti chiamando N il numero di molecole contenute in 1 cm^3 d'un corpo, p il peso molecolare, n il numero di atomi fisici di cui si compone l'atomo d'idrogeno sarà, per i gas:

$$a = \mathrm{N} p n \pi (\varrho + \varrho')^2, \qquad \varrho + \varrho' = \sqrt{\frac{a}{\pi \mathrm{N} p n}}.$$

I solidi, visto che lo stato d'aggregazione è senza influenza sull'assorbimento, potranno esser considerati come gas, prendendo $p = 2\,d : d_{\mathrm{H}}$ e prendendo per N il numero di molecole contenute in 1 cm^3 d'idrogeno di densità d_{H}.

Il valore di a è stato trovato da Lenard per molti corpi, quello di N secondo la teoria dei gaz è all'incirca 10^{20} per 1 cm^3 di gaz a 0° e 760 mm. quindi supponendo $\varrho = \varrho'$ potremo avere il raggio ϱ della proiezione dell'atomo chimico d'idrogeno; se questo poi fosse composto di n atomi fisici, il raggio di ciascuno di essi sarebbe $x = \varrho : \sqrt{n}$. Il volume di ciascuno di questi atomi sarebbe $v = \frac{4}{3} \pi \varrho^3 : \sqrt{n^3}$, ed il volume totale degli atomi contenuti in 1 cm^3 d'un corpo di densità d sarebbe $\mathrm{N} p n v = \frac{1}{3} a \varrho : \sqrt{n}$, e la densità di ciascun atomo ossia la densità assoluta della materia sarebbe $\mathrm{D} = 3\, d \sqrt{n} : a\varrho$, supponendo che la massa dell'atomo non sia traversabile dai raggi catodici. Supponendo $n = 1$ ossia che l'atomo d'idrogeno sia semplice, s'avrebbe un limite inferiore di essa densità $\mathrm{D} = 3d : a\varrho$.

Nella seguente tabella sono riportati i valori di ϱ e D così ottenuti, nella 1ª colonna trovasi il simbolo o il nome del corpo sperimentato e nella 2ª colonna trovasi pei gas il potere assorbente A, di uno strato a temperatura e pressione ordinaria spesso $1 : p$ cm. e pei solidi invece quello d'uno strato spesso $1 : d$ cm.

	A	$\frac{1}{2}(\varrho + \varrho')$	D
H_2	0,237	$1{,}38.10^{-11}$	33.10^6
CH_4	0,124	1,00 »	88 »
$Az\,H_3$	0,148	1,09 »	67 »
CO	0,122	0,98 »	89 »
$C_2\,H_4$	0,132	1,02 »	80 »
Az_2	0,113	0,95 »	101 »
Aria	0,118	0,97 »	94 »
O_2	0,126	1,00 »	88 »
H_2S	0,124	1,00 »	88 »
CO_2	0,115	0,96 »	97 »
Az_2O	0,102	0,90 »	118 »
SO_2	0,133	1,03 »	79 »
Collodio	.3010	$1{,}07.10^{-11}$	70.10^6
Carta di seta	2070	0,88 »	123 »
Vetro	3160	1,10 »	66 »
Alluminio	2650	0,96 »	97 »
Mica	2590	1,00 »	86 »
Oro falso	2670	1,01 »	83 »
Argento	3070	1,08 »	68 »
Oro	2880	1,03 »	74 »

I valori di ϱ, molto minori di quelli dati dalla teoria dei gas, sono molto concordanti, tenuto conto del genere dell' esperienze e della diversità dei corpi considerati; il valore che si discosta di più dagli altri è quello fornito dall' idrogeno che ha un potere assorbente circa doppio di quello che risulterebbe dalla sua densità e che pare si manifesti anche nell' idrogeno in combinazione. I valori della densità assoluta sono enormi circa 80000 kgr. per cm^3, essi sono un po' più discordi perchè contenendo $\sqrt{a^3}$ risentono maggiormente l' influenza delle piccole differenze del valore di a.

Questo valore della densità assoluta della materia è essenzialmente diverso da quello che presumibilmente assumono i corpi alla temperatura dello zero assoluto, e che pare sia diverso da corpo a corpo e per l' idrogeno sia molto minore di 1. La temperatura dello zero assoluto corrisponde alla quiete del movimento molecolare di traslazione, ma da quanto precede risulta che ciascuna molecola ed anche ciascun atomo è composto di parti isolate e distanti che probabilmente rimangono tali anche allo zero assoluto. Non è improbabile che queste parti siano tenute distanti da velocità proprie le quali, almeno nel caso delle molecole gazose e monoatomiche che impiegano tutto il calore ri-

cevuto unicamente nell' aumento del movimento di traslazione, dovrebbero essere indipendenti dalla temperatura. A tali movimenti potrebbero talvolta essere dovute le radiazioni termiche o luminose che non potrebbero esser spiegate dai movimenti molecolari finora noti, che sono troppo lenti e produrrebbero onde molto più lunghe di quelle che in realtà si producono.

A tale proposito è da notare che dalla proporzionalità fra gli spazi percorsi in tempi uguali e le velocità rispettive risulta, chiamando ε l' ampiezza d' una vibrazione luminosa, v la sua velocità media, λ la sua lunghezza d' onda e V la velocità della luce: $v = V\varepsilon : \lambda = 0{,}6.10^{15}\varepsilon$. Non è quindi improbabile che la velocità media delle particelle vibranti sia molto grande e quindi non più trascurabile rispetto alla velocità dei raggi catodici. In tal caso il valore di ϱ dedotto dall' assorbimento rappresenterebbe non già il raggio della proiezione dell' atomo d' idrogeno, ma quello di tutta l' area che essa proiezione ha occupato nel tempo che impiega il raggio catodico a percorrere uno spazio uguale allo spessore dell' atomo fisico semplice.

Ne risulterebbe che il potere assorbente d' un corpo pei raggi catodici verrebbe ad aumentare quando per effetto di un aumento di temperatura o di eccitazioni elettriche, o di ondulazioni luminose, questo corpo emettesse o trasmettesse radiazioni luminose o termiche oscure o perturbazioni nell' etere di qualsiasi natura. L' assorbimento d' un corpo attraversato da raggi luminosi dovrebbe essere minore perpendicolarmente ai raggi che non nella loro direzione, e nel caso di luce polarizzata darebbe modo di rendere manifesta la direzione della vibrazione. L' esperienza deciderà se è possibile rendere sensibile un tale effetto, sia rinforzando e concentrando le vibrazioni, sia usando raggi catodici più lenti; giova notare che l' effetto sarà tanto più facilmente sensibile quanto maggiore è la suddivisione della materia, a parità di valore assoluto di ε.

Dall' esperienze di Lenard risulta che il potere assorbente dei corpi pei raggi catodici aumenta quando diminuisce la loro velocità. Questo maggior assorbimento può dipendere da ciò che essi, per effetto della minor velocità, risentono maggiormente l'azione delle particelle cui passano abbastanza vicine, e quindi risentono quest' azione in modo sensibile a una distanza tanto maggiore quanto minore è la loro velocità, e verrebbe così aumentato il valore di $\varrho + \varrho'$. Esso però potrebbe altresì esser causato da un movimento atomico, che aumentasse la sezione apparente degli atomi, ed anche in questa ipotesi l' assorbimento sarebbe tanto maggiore quanto minore è la velocità del raggio catodico.

Le considerazioni e i dati precedenti ci danno modo altresì di determinare la natura dei raggi Röntgen, o almeno di decidere se essi siano costituiti da particelle esilissime scagliate con grandissima velocità, oppure da una perturbazione dell' etere. Nel primo caso l' assorbimento per cm. di spessore e cm^2 di sezione dovrebbe essere $N\pi(\varrho + \varrho'')^2$, ed anche ammettendo che ϱ'', il semi-

diametro delle particelle costituenti i raggi Röntgen, fosse nullo, l'assorbimento non dovrebbe essere molto minore di quello dei raggi catodici, mentre invece risulta enormemente minore. Qualora si volesse spiegare una tale differenza supponendo che per effetto d'una maggior velocità o della mancanza di carica elettrica queste particelle non risentissero l'azione degli atomi del corpo assorbente se non a distanza minima, molto minore del valore trovato per $\varrho + \varrho'$, si urterebbe tuttavia contro il fatto che questo assorbimento non è proporzionale alla densità del corpo assorbente come dovrebbe avvenire data la costituzione della materia quale risulta dalle considerazioni precedenti.

Bisogna dunque ammettere che i raggi Röntgen sono dovuti a una perturbazione nell'etere; e la mancanza di diffrazione e interferenze indicherebbe una mancanza di periodicità nella medesima. Siccome poi l'urto dei raggi catodici produce nei corpi una vibrazione regolare che è la fluorescenza, i raggi Röntgen potrebbero esser dovuti ad etere trascinato nel movimento dalle particelle di raggi catodici e rimasto libero quando la particella viene fermata. A tale proposito osserverò che m'è parso osservare ripetutamente in esperienze dirette a tale scopo che un filo di vetro reso fluorescente dai raggi catodici, appariva talora molto confuso a contorni sfumati quando veniva osservato attraverso e perpendicolarmente a uno spesso strato di raggi catodici, ciò che indicherebbe uno sconvolgimento prodotto nell'etere dal passaggio di essi raggi; però avendo dovuto interrompere le esperienze, che conto riprendere fra breve, non ho potuto assicurarmi dell'effetto accennato nè studiare tale effetto nella direzione d'essi raggi e con un rifrattometro interferenziale, nè verificare le varie conseguenze cui ho accennato in questa Nota.

Chimica fisica. — *Sugli equilibrî nei sistemi di due e di tre componenti con una fase liquida.* Nota del dott. Giuseppe Bruni, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

Io mi sono proposto come scopo del presente lavoro di confrontare l'andamento dei fenomeni di saturazione (congelamento o solubilità) delle miscele binarie coi corrispondenti fenomeni d'equilibrio delle miscele ternarie. Questo studio verrà limitato alle miscele che contengono una ed una sola fase liquida. (Gli equilibrî nei sistemi ternarî con due fasi liquide vennero e vengono tuttora studiati a fondo da F. A. H. Schreinemakers). Per raggiungere lo scopo da me prefisso occorre confrontare fra loro l'andamento dei fenomeni in miscele binarie e ternarie che realizzino equilibrî dello stesso ordine.

Alla classificazione degli equilibrî eterogenei provvede nel modo più completo la nota *regola della fase* di Willard Gibbs. Secondo questa, saranno

dello stesso ordine, e quindi fra di loro confrontabili, sistemi che — per miscele di n sostanze — constino di n, $n+1$, od $n+2$ fasi. Esaminiamo partitamente questi tre casi.

Il primo (n fasi) ci è dato nelle miscele binarie da sistemi di 2 fasi: miscela liquida e vapore; quindi da miscele non sature rispetto ad alcuno dei componenti; per le miscele ternarie da sistemi di 3 fasi: miscela liquida, vapore ed una fase solida, cioè da sistemi saturi rispetto ad uno solo dei componenti. Entrambi questi sistemi sono in quello stato che Gibbs chiama di equilibrio eterogeneo incompleto, e se si usa delle solite rappresentazioni grafiche, designando su uno degli assi coordinati le temperature, e sull'altro o sugli altri in un modo qualunque la composizione della miscela liquida, i luoghi di esistenza di tali sistemi sono superfici.

Il secondo caso ($n+1$ fasi) è dato nelle miscele binarie da sistemi di 3 fasi: miscela liquida, vapore, ed una fase solida; nelle miscele ternarie da sistemi di 4 fasi: miscela liquida, vapore, e due fasi solide. Questi sistemi di $n+1$ fasi godono di un equilibrio eterogeneo completo ed i loro luoghi d'esistenza sono curve, le quali, per le miscele binarie saranno curve di saturazione (congelamento o solubilità); per le miscele ternarie curve crioidratiche.

Il terzo caso ($n+2$ fasi) è fornito nelle miscele binarie da sistemi di 4 fasi: miscela liquida, vapore, e due fasi solide; nelle miscele ternarie da sistemi di 5 fasi: miscela liquida, vapore, e tre fasi solide. Luoghi d'esistenza di tali sistemi sono punti multipli; cioè rispettivamente: punti crioidratici binarî, e punti crioidratici ternarî.

Abbiamo così veduto che ai fenomeni di saturazione (congelamento o solubilità) delle miscele binarie corrispondono nello stesso ordine d'equilibrio i fenomeni crioidratici delle miscele ternarie. Fra questi dovrà dunque essere eseguito il confronto.

Per ottenere tale confronto nel modo più semplice, sarà necessario considerare dapprima i fenomeni d'equilibrio in una miscela binaria qualunque, e confrontarli con quelli corrispondenti di una miscela ternaria ottenuta aggiungendo ai due primitivi componenti una terza sostanza che non si combini con essi, nè sia con essi isomorfa.

Quanto all'andamento dei fenomeni di saturazione (congelamento o solubilità) nelle miscele binarie si possono distinguere quattro casi principali:

I. I due componenti non danno un composto d'addizione, nè sono isomorfi.

II. I due componenti danno un composto d'addizione che al punto di congelamento si separa senza decomposizione.

III. I due componenti danno un composto d'addizione che si separa con decomposizione.

IV. I due componenti sono isomorfi.

Una classificazione di questo genere si trova per la prima volta nei noti lavori di Bakkuis Roozeboom (¹). In essa manca però il 4° caso.

Io studierò partitamente l'andamento dei fenomeni di saturazione in ognuno di questi casi di miscele binarie, considerando successivamente l'andamento dei fenomeni crioidratici nella corrispondente miscela ternaria ottenuta nel modo sopra descritto.

Lo studio dei fenomeni crioidratici nelle miscele ternarie venne finora limitato quasi esclusivamente al caso delle soluzioni di due sali in acqua. La teoria generale di tali fenomeni si deve ad F. A. H. Schreinemakers (²), il quale formulò le regole che tali fenomeni seguono, secondo che i due sali formino o no un sale doppio, e secondo che tale sale doppio sia stabile od instabile. In un precedente lavoro (³) io ho studiato un altro caso, cioè che i due sali siano fra di loro isomorfi. Per quanto sia evidente che le considerazioni ora dette possano estendersi a tutte le miscele ternarie senza ecce-

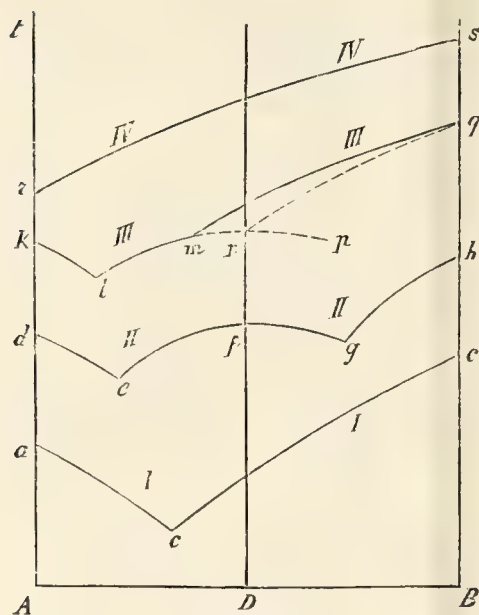
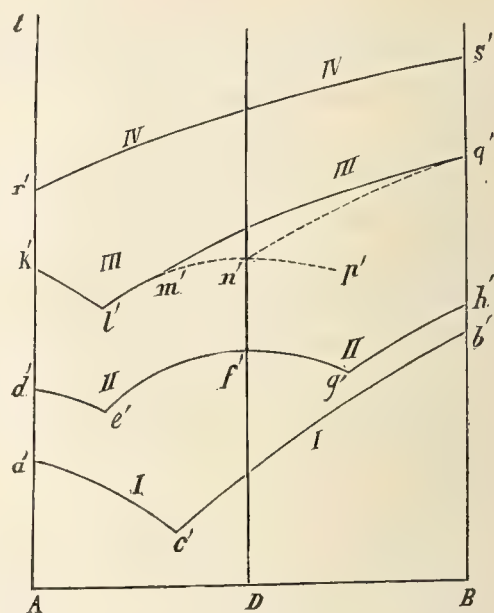



FIG. 1. FIG. 2

zione, mancano finora quasi completamente le esperienze a tale riguardo. Negli ultimi tempi però Kuriloff (⁴) studiò a fondo i fenomeni d'equilibrio nelle miscele ternarie di benzolo, acido picrico, e β-naftolo. Tale sistema non corrisponde però in tutto alle condizioni da me enunciate più sopra, poichè l'acido picrico si combina tanto con il β-naftolo che con il benzolo. Ciò complica i fenomeni e rende più difficile il trarre da questi interessanti lavori

(¹) Cfr. Kuriloff, Zeitschr. f. phys. Ch. XXV, 419.

(²) Zeitschr. f. phys. Ch. XVII, 73.

(³) Gazz. chim. ital., 1897, I, 549.

(⁴) Zeitschr. f. phys. Ch. XXIII, 673; XXIV, 441, 697; XXV, 419.

conclusioni generali nel senso da me desiderato. Io ho quindi eseguito alcune esperienze per verificare su varie miscele ternarie di sostanze organiche le regole già trovate da Schreinemakers e da me. Queste esperienze, da cui risultarono sempre verificate le suddette regole, verranno dettagliatamente riferite in altro luogo. Qui esporrò brevemente le principali considerazioni teoriche che da queste e dalle già note esperienze si possono dedurre.

Per rendere più chiaro il confronto fre gli equilibrî nei sistemi binarî e ternarî userò la seguente rappresentazione grafica. Per le miscele binarie il sistema di rappresentazione è il solito (fig. 1). Sull' asse delle ascisse sono indicate le concentrazioni riferite a 100 molecole di miscela, su quello delle ordinate la temperatura. Per le miscele ternarie (fig. 2) il sistema adottato è analogo ([1]). Sull' asse delle ascisse viene indicato il rapporto in cui si trovano fra di loro i numeri delle molecole dei due componenti primitivi indipendentemente dal terzo componente che vien considerato come solvente. Sull' asse delle ordinate vengono sempre indicate le temperature.

Caso I. — *Sistemi i cui componenti non si combinano, nè sono fra loro isomorfi.*

L' andamento dei fenomeni nei sistemi binarî di questa categoria è assai noto. Siano A e B i due componenti. La curva d' equilibrio (fig. 1, I) consta di due rami i quali partendo da *a* e da *b*, punti di congelamento rispettivamente di A e di B, vanno a riunirsi nel punto crioidratico *c*. Passiamo ora alle miscele ternarie in cui oltre ad A e B entri un terzo componente C, che considereremo come solvente. Avremo (fig. 2, I) i due punti *a'* e *b'* che saranno rispettivamente i punti crioidratici delle soluzioni di A in C, e di B in C; di qui partiranno le due curve crioidratiche che si incontreranno in *c'* punto crioidratico ternario. A questo punto *c'* corrisponderà una temperatura più bassa di quella corrispondente ad *a'* ed a *b'*. Questo andamento venne dimostrato teoricamente da Schreinemakers (l. c.) e sperimentalmente da lui stesso e da Mazzotto ([2]). Esso venne da me verificato studiando le soluzioni in benzolo ed in bromuro d' etilene di naftalina e difenilammina, le cui miscele binarie erano state studiate da Roloff ([3]). Riassumiamo ora e confrontiamo l' andamento dei fenomeni nelle miscele binarie e ternarie. (Indichiamo con L e con V rispettivamente la miscela liquida ed il vapore).

Nei sistemi binarî si ha:		Nei sistemi ternarî si ha:	
il punto *a* la curva *ac*	colle fasi: A, L, V	il punto *a'* la curva *a'c'*	colle fasi: A, C, L, V
il punto *c*	» » A, B, L, V	il punto *c'*	» » A, B, C, L, V
la curva *bc* il punto *b*	» » B, L, V	la curva *b'c'* il punto *b'*	» » B, C, L, V

([1]) Cfr. Megerhofer, Monatshefte f. Ch. XIV, 177.
([2]) Rend. dell' Istituto Lombardo, XXIII, 515, 633.
([3]) Zeitschr. f. phys. Ch. XVII, 325.

Si vede il parallellismo perfetto fra l' andamento degli equilibrî nei sistemi binarî ed in quelli ternarî. Solamente in questi ultimi vi è sempre presente in più come fase solida il terzo componente C.

Caso II. — *Sistemi di cui due componenti danno un composto d'addizione stabile.*

L' andamento degli equilibrî nei sistemi di due componenti formanti un composto d' addizione, che al punto di congelamento si separa senza decomposizione, è rappresentato dalla curva II della fig. 1. In essa l' ordinata elevata dal punto D esprime la composizione del prodotto d' addizione. I due punti *d* ed *h* rappresentano i punti di congelamento di A e di B, il punto *f* quello del composto d' addizione che designeremo con D. La curva d' equilibrio consterà dei tre rami *de*, *efg*, *gh* rappresentanti soluzioni rispettivamente sature riguardo ad A, D, B. Le due prime si incontrano in *e*, le due ultime in *g*, punti crioidratici. Il punto *f* rappresenta in questa curva un punto di massimo poichè i segmenti *fe* ed *fg* rappresentano il variare delle temperature di congelamento di D per l' aggiunta di un eccesso di uno o dell' altro componente. La curva presenta quindi due punti di minimo (*e*, *g*) ed un punto di massimo (*f*). A questa categoria appartengono i sistemi di $Fe_2Cl_6 . 12H_2O$, $CaCl_2 . 6H_2O$, $CaCl_2 . 4H_2O$ studiati da Roozeboom e quelli di trifenilmetano e benzolo, acido picrico e β-naftolo studiati da Kuriloff (l. c.).

Quando i due componenti si combinino in diversi rapporti dando origine a diversi composti, la curva potrà constare d' un numero corrispondente di rami, e presenterà tanti punti di massimo (i punti di congelamento dei singoli composti), ed i relativi punti di minimo (crioidratici). Questo andamento presentano ad es. le miscele di fenolo e trimetilcarbinolo studiate da Paternò e Montemartini [1] e da Paternò ed Ampola [2], per quanto i punti di massimo non corrispondano perfettamente a rapporti molecolari.

Dal fin qui detto risulta una volta di più l' erroneità del concetto che dominò per molti anni nella scienza, che cioè il punto minimo di congelamento delle miscele corrispondesse a miscugli in cui i componenti si trovassero in rapporti molecolari, e che fecero riguardare i crioidrati e le leghe eutectiche come sorta di combinazioni. Qui si vede invece che quando i due componenti d' una miscela si combinano fra di loro, ai relativi rapporti molecolari corrispondono dei punti di massimo, anzichè dei punti di minimo nella curva di congelamento.

Dobbiamo ora considerare i sistemi ternarî corrispondenti, cioè quelli in cui dei tre componenti A, B e C, i primi due diano un composto d' addizione D, che dalle sue soluzioni in C si separi alla temperatura crioidra-

(1) Gazz. chim. ital., 1894, II, 208.
(2) Gazz. chim. ital., 1897, I, 481.

tica senza decomposizione. Anche qui l'andamento dei fenomeni è analogo (fig. 2, II). Ai 3 punti di congelamento delle miscele binarie corrispondono i 3 punti d', f', h' punti crioidratici delle soluzioni di A, D e B in C. La curva d'equilibrio (crioidratica) consta ancora dei 3 rami $d'e'$, $e'f'g'$, $g'h'$, che si incontrano in e' e g' punti crioidratici doppî; f' è punto di massimo; e' e g' punti di minimo. Ciò venne dimostrato teoricamente da Schreinemakers (l. c.) e verificato, per soluzioni in acqua di due sali che formino un sale doppio stabile, da Scheinemakers stesso, da Meyerhoffer (¹) e da me (²). Io ho verificato inoltre questo andamento pel caso delle miscele di acido picrico e β-naftolo usando come solvente il bromuro d'etilene. Le miscele binarie erano state, come fu sopra accennato, studiate da Kuriloff.

Riassumendo e confrontando l'andamento nelle miscele binarie e ternarie avremo:

Nelle miscele binarie:		Nelle miscele ternarie:	
il punto d / la curva de	colle fasi: A, L, V	il punto d' / la curva $d'e'$	colle fasi: A, C, L, V
il punto e	» » A, D, L, V	il punto e'	» » A, D, C, L, V
la curva efg / il punto f	» » D, L, V	la curva $e'f'g'$ / il punto f'	» » D, C, L, V
il punto g	» » B, D, L, V	il punto g'	» » B, D, C, L, V
la curva gh / il punto h	» » B, L, V	la curva $g'h'$ / il punto h'	» » B, C, L, V

La temperatura corrispondente ad e è più bassa di quella corrispondente a d e ad f. — La temperatura corrispondente ad e' è più bassa di quella corrispondente a d' ed f'.

La temperatura corrispondente a g è più bassa di quella corrispondente ad f e ad h. — La temperatura corrispondente a g' è più bassa di quella corrispondente ad f' ed h'.

È evidente qui pure il parallelismo fra le due serie di equilibrî. Fra ogni sistema binario ed il corrispondente sistema ternario vi è sempre la differenza della presenza del terzo componente C come fase solida.

Caso III. — *Sistemi di cui due componenti danno un composto d'addizione instabile.*

Entrano in questa categoria i sistemi di cui due componenti danno un composto d'addizione che non può separarsi dalle miscele liquide (rispettivamente: al punto di congelamento od al punto crioidratico) senza decomporsi, ma si separa accanto ad esso uno dei componenti. Anche in questo caso (fig. 1, III, e fig. 2, III) le curve d'equilibrio constano di 3 rami: kl, lp, mq, e risp. $k'l'$, $l'p'$, $m'q'$; ma mentre nel caso precedente i 2 punti d'incontro cadevano uno da una parte ed uno dall'altra dell'ordinata che esprime la composizione del prodotto d'addizione, in questo caso tali punti d'incontro l, m e risp. l', m' cadono entrambi da un lato di questa ordi-

(¹) Monatshefte f. Ch, XIV, 177.
(²) Gazz. chim. ital., 1897, I, 549.

nata. Non vi è quindi più nessun punto di massimo. I punti *l* ed *l'*, i quali rappresentano sistemi in cui coesistono come fasi solide il composto D e quello dei componenti che non si separa, corrispondono a temperature più basse di quelle che corrispondono ai punti *m* ed *m'* le quali rappresentano sistemi in cui coesistono come fasi solide D e quello dei componenti che si separa. Ciò risulta dagli studî e dalle esperienze di Roozebom (l. c.) per le miscele binarie, di Schreinemakers (l. c.) per quelle ternarie.

In alcuni casi speciali uno dei punti d' incontro può cadere sull' ordinata che esprime la composizione del prodotto d' addizione. Ciò sarebbe rappresentato dalle curve punteggiate *lnq* e risp. *l'n'q'*. Un tale andamento, che segnerebbe come una transizione fra il II ed il III caso, venne realizzato da Kuriloff (l. c.) coi sistemi binarî di benzolo ed acido picrico.

Caso IV. — *Sistemi di cui due componenti sono fra loro isomorfi.*

I casi precedenti si riferiscono a sistemi i cui componenti non possono sciogliersi reciprocamente allo stato solido. Ci occuperemo ora dei sistemi binarî e ternarî di cui due costituenti formino soluzione solida. Se tale solubilità allo stato solido è limitata, allora l' andamento delle curve d' equilibrio non sarà molto diverso da ciò che venne esposto nel I caso. Infatti nelle miscele binarie si avranno ancora i due rami *ac* e *bc*. Solamente lungo questi si avranno invece di A e di B come fasi solide, rispettivamente due soluzioni solide di composizione variabile, e nel punto quadruplo *c* coesisteranno invece di A e B come fasi solide le due soluzioni solide reciprocamente sature. Un tale caso è perfettamente realizzato dal comportamento delle miscele di benzolo e fenolo che vennero studiate da Garelli [1], da Paternò ed Ampola [2] e da me [3]. Nei sistemi ternarî corrispondenti, studî sui fenomeni crioidratici non vennero eseguiti. Però dagli studî di Rozeboom sulla solubilità dei cristalli misti [4] si deve dedurre che nel caso che due sostanze formino cristalli misti in proporzioni limitate, l' andamento dei fenomeni dev' essere completamente parallelo a quello suddescritto per le miscele binarie.

Le cose si cambiano essenzialmente quando si abbiano miscele binarie e ternarie di cui due componenti siano completamente o quasi isomorfi, e si sciolgano quindi allo stato solido in tutte le proporzioni. Quale sia l' andamento dei fenomeni nei sistemi binarî venne da me dimostrato in un recente lavoro [5]. In base alla regola della fase si dimostra che la curva d' equilibrio (fig. 1, IV) deve ridursi ad un solo ramo *rs*, talchè le temperature di congelamento delle varie miscele variano in modo continuo fra le

(1) Gazz. chim. ital. 1896„ II, 107.
(2) Gazz. chim. ital. 1807„ I, 488.
(3) Gazz. chim. ital. 1898. I.
(4) Zeitschr. f. phys. Ch., VIII, 504.
(5) Rendic. di questa Accad., 1898, 2° sem., 138

temperature di congelamento dei due componenti. Di questo comportamento si hanno infatti numerosi esempî sperimentali studiati da Küster [1] e da Garelli [2]. Che gli equilibrî nei sistemi ternarî procedano in modo parallelo può dimostrarsi con un ragionamento parallelo a quello da me fatto nel mio suaccennato lavoro pei sistemi binarî, come pure può dedursi facilmente dalla teoria sulla solubilità dei cristalli misti fondata da Roozeboom (l. c.) sulla regola della fase.

In un lavoro precedente [3] io ho studiato questo problema, ed ho infatti dimostrato che la curva crioidratica (fig. 2, IV) si riduce ad un solo ramo $r's'$, dimodochè le temperature crioidratiche delle soluzioni miste di due sostanze isomorfe variano in modo continuo fra le temperature crioidratiche delle soluzioni dei due componenti. Ciò venne da me verificato allora per le soluzioni di $ZuSO_4 . 7H_2O$ e $MgSO_4 . 7H_2O$ in acqua. Ora ho verificato perfettamente tale andamento anche per le soluzioni di naftalina e β-naftolo in benzolo, e di fenantrene e carbazolo pure in benzolo. Le corrispondenti miscele binarie erano state studiate rispettivamente da Küster e da Garelli (l. c.).

Riassumendo e confrontando quindi l'andamento degli equilibrî nei sistemi binarî e ternarî (indicando con S la soluzione solida) avremo:

Nelle miscele binarie:	Nelle miscele ternarie:
il punto r colle fasi: A, L, V	il punto r' colle fasi: A, C, L, V
la curva rs » » S, L, V	la curva $r's'$ » » S, C, L, V
il punto s » » B, L, V	il punto s' » » B, C, L. V
La temperatura varia in modo continuo da r ad s.	La temperatura varia in modo continuo da r' ad s'.

Anche qui dunque l'andamento è perfettamente parallelo. Nelle miscele binarie vi è sempre in più la fase solida C.

Concludendo: se ad un sistema di due componenti con una sola fase liquida possibile si aggiunga un terzo componente che non si combini coi primi due, nè sia con essi isomorfo, le curve esprimenti equilibrî dello stesso ordine (curve di saturazione nei sistemi binarî e curve crioidratiche nei sistemi ternarî) hanno un andamento parallelo. Solamente nei sistemi rappresentati dalla curva della miscela ternaria esiste sempre in più come fase solida il terzo componente aggiunto.

[1] Zeitschr. f. phys. Ch. V, 601; VIII, 584; XII, 508; XVI, 525; XVII, 357.
[2] Gazz. chim. ital., 1894, II, 263.
[3] Gazz. chim. ital., 1897, I, 549.

Fisica matematica. — *Sulla temperatura di un conduttore lineare bimetallico.* Nota II di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

In una mia Nota precedente [1] ho dimostrato come si possa dedurre lo stato termico stazionario di un conduttore lineare bimetallico nel caso in cui si tenga conto degli effetti Peltier e Thomson ed in cui si considerino i coefficienti k, h, ω, σ e c quali funzioni lineari della temperatura. Ho inoltre considerato il caso più semplice in cui si possa trascurare l'effetto Thomson e riguardare le quantità k, h, ω e c quali costanti. Nella presente Nota tratterò per i due stessi casi il problema dello stato variabile della temperatura.

Le equazioni differenziali erano nel caso più generale:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2j_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - (m_1^2 - n_1\delta_1)u_1 + n_1 = g_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(u_1^2)}{\partial x_1^2} - j_1\varepsilon_1 \frac{\partial(u_1^2)}{\partial x_1} + m_1^2\beta_1 u_1^2 + \frac{g_1\eta_1}{2}\frac{\partial(u_1^2)}{\partial t}, \qquad (I_1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 2j_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - (m_2^2 - n_2\delta_2)u_1 + n_2 = g_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\alpha_2}{2}\frac{\partial^2(u_2^2)}{\partial x_2^2} - j_2\varepsilon_2 \frac{\partial(u_2^2)}{\partial x_2} + m_2^2\beta_2 u_2^2 + \frac{g_2\eta_2}{2}\frac{\partial(u_2^2)}{\partial t}, \qquad (I_2)$$

ove per abbreviare si pose:

$$2j_1 = \frac{i\sigma_{10}}{qk_{10}} \qquad 2j_2 = \frac{i\sigma_{20}}{qk_{20}}$$

$$m_1^2 = \frac{ph_{10}}{qk_{10}} \qquad m_2^2 = \frac{ph_{20}}{qk_{20}}$$

$$n_1 = \frac{i_2\omega_{10}}{Jq^2k_{10}} \qquad n_2 = \frac{i^2\omega_{20}}{Jq^2k_{20}}$$

$$g_1 = \frac{\varrho c_{10}}{k_{10}} \qquad g_2 = \frac{\varrho c_{20}}{k_{20}}$$

Si avranno così le seguenti condizioni:

(1_1) $\quad x_1 = 0\ ,\ \ u_1 = 0$ per ogni t; $\quad x_2 = l_2\ ,\ \ u_2 = 0$ per ogni t; $\quad (1_2)$

(2) $\qquad (u_1)_{l_1} = (u_2)_0$ per ogni t;

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. VII, pag. 346.

$$(3)\quad \frac{i}{q}\,\mathrm{P} = k_{10}\left\{(1+\alpha_1 u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right\}_{l_1} - k_{20}\left\{(1+\alpha_2 u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right\}_0 \quad \text{per ogni } t\,;$$

$$(4)\qquad t=0 \quad u_1 = u_2 = 0 \ \text{ per ogni } x_1 \text{ ed } x_2\,.$$

Risolviamo per approssimazioni successive le equazioni (I_1) e (I_2). Poniamo: $u_1 = U_1 + V_1$, $u_2 = U_2 + V_2$ intendendo con U_1 ed U_2 di esprimere lo stato stazionario precedentemente determinato. Le equazioni differenziali divengono:

$$(I'_1)\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2U_1}{dx^2_1} + 2j_1\frac{dU_1}{dx_1} - (m_1^2 - n_1\delta_1)U_1 + n_1 + \frac{\alpha_1}{2}\frac{d^2(U_1^2)}{dx_1^2} + j_1\varepsilon_1\frac{d(U_1^2)}{dx_1} - \\ &-m_1^2\beta_1 U^2 = g_1\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{g_1\eta_1}{2}\frac{\partial(V_1^2)}{\partial t} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - 2j_1\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + (m_1^2 - n_1\delta_1)V_1 - \\ &-\frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(V_1^2)}{\partial x_1^2} - \alpha_1\frac{\partial^2(U_1V_1)}{\partial x_1^2} - j_1\varepsilon_1\frac{\partial(V_1^2)}{\partial x_1} - 2j_1\varepsilon_1\frac{\partial(U_1V_1)}{\partial x_1} + m_1^2\beta_1 V_1^2 \end{aligned}\right.$$

$$(I'_2)\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2U_2}{dx_2^2} + 2j_2\frac{dU_2}{dx_2} - (m_2^2 - n_2\delta_2)U_2 + n_2 + \frac{\alpha_2}{2}\frac{d^2(U_2^2)}{dx_2^2} + j_2\varepsilon_2\frac{d(U_2^2)}{dx_2} - \\ &-m_2^2\beta_2 U_2^2 = g_2\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{g_2\eta_2}{2}\frac{\partial(V_2^2)}{\partial t} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - 2j_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2} + (m_2^2 - n_2\delta_2)V_2 - \\ &-\frac{\alpha_2}{2}\frac{\partial^2(V_2^2)}{\partial x_2^2} - \alpha_2\frac{\partial^2(U_2V_2)}{\partial x_2^2} - j_2\varepsilon_2\frac{\partial(V_2^2)}{\partial x_2} - 2j_2\varepsilon_2\frac{\partial(U_2V_2)}{\partial x_2} + m_2^2\beta_2 V_2^2\,. \end{aligned}\right.$$

Osserviamo che le quantità U_1 ed U_2 per definizione soddisfano rispettivamente con sufficiente approssimazione alle equazioni che si formerebbero uguagliando a zero le parti delle (I'_1) e (I'_2) che precedono i segni di eguaglianza. Infatti queste due equazioni non sarebbero altro che le equazioni dello stato stazionario.

Ci rimangono quindi solo a determinare le parti variabili V_1 e V_2 in modo che siano soddisfatte le due seguenti equazioni:

$$(I''_1)\quad g_1\frac{\partial V_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^1} - 2j_2\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + (m_1^2 - n_1\delta_1)V_1 = -\frac{g_1\eta_1}{2}\frac{\partial(V_1^2)}{\partial t} +$$
$$+\frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(V_1^2)}{\partial x_1^2} + \alpha_1\frac{\partial^2(U_1V_1)}{\partial x_1^2} + j_1\varepsilon_1\frac{\partial(V_1^2)}{\partial x_1} + 2j_1\varepsilon_1\frac{\partial(U_1V_1)}{\partial x_1} + m_1^2\beta_1 V_1^2\,,$$

$$(I''_2)\quad g_2\frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - 2j_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2} + (m_2^2 - n_2\delta_2)V_2 = -\frac{g_2\eta_2}{2}\frac{\partial(V_2^2)}{\partial t} +$$
$$+\frac{\alpha_2}{2}\frac{\partial^2(V_1^2)}{\partial x_1^2} + \alpha_2\frac{\partial^2(U_2V_2)}{\partial x_2^2} + j_2\varepsilon_2\frac{\partial(V_2^2)}{\partial x_2} + 2j_1\varepsilon_2\frac{\partial(U_1V_1)}{\partial x_1} + m_2\beta_2 V_2^2\,.$$

Le condizioni limiti poi sono evidentemente le seguenti:

$$(1'_1)\quad x_1 = 0 \quad V_1 = 0 \ \text{per ogni } t\,; \qquad x_2 = l_2 \quad V_2 = 0 \ \text{per ogni } t \quad (1'_2)$$

$$(2')\qquad (V_1)_{l_1} = (V_2)_0 \ \text{ per ogni } t$$

$$(3') \quad 0 = k_{10}\left\{\left[1 + \alpha_1 (V_1 + U_1)\right] \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \alpha_1 V_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right\}_{l_1} - \\ - k_{20}\left\{\left[1 + \alpha_2 (V_2 + U_2)\right] \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \alpha_2 V_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right\}_0$$

$$(4') \quad t = 0 \quad V_1 = -U_1 \quad , \quad V_2 = -U_2 \text{ per ogni } x_1 \text{ ed } x_2 .$$

Le equazioni (I''_1) e (I''_2) si possono risolvere per successive approssimazioni in modo analogo a quello impiegato per le equazioni dello stato stazionario.

Si cercheranno dapprima soluzioni particolari delle equazioni:

$$(I_{bis}) \quad \begin{aligned} g_1 \frac{\partial V'_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 V'_1}{\partial x_1^2} + 2 j_1 \frac{\partial V'_1}{\partial x_1} - (m_1^2 - n_1 \delta_1) V'_1 \\ g_2 \frac{\partial V'_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 V'_2}{\partial x_2^2} + 2 j_2 \frac{\partial V'_2}{\partial x_2} - (m_2^2 - n_2 \delta_2) V'_2 \end{aligned}$$

che soddisfino alle condizioni ($1'_1$), ($1'_2$), ($2'$) e ($3'$). Si formeranno i sistemi di equazioni successive:

$$g_1 \frac{\partial V''_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 V''_1}{\partial x_1^2} - 2 j_1 \frac{\partial V''_1}{\partial x_1} + (m_1 - n_1 \delta_1) V''_1 = - \frac{g_1 \eta_1}{2} \frac{\partial (V'^2_1)}{\partial t} + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^2 (V'^2_1)}{\partial x_1^2} \\ + \alpha_1 \frac{\partial^2 (U_1 V'_1)}{\partial x_1^2} + j_1 \varepsilon_1 \frac{\partial (V'^2_1)}{\partial x_1} + 2 j_1 \varepsilon_1 \frac{\partial (U_1 V'_1)}{\partial x_1} + m_1^2 \beta_1 V'^2_1 .$$

$$g_1 \frac{\partial V'''_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 V'''_1}{\partial x_1^2} - 2 j_1 \frac{\partial V'''_1}{\partial x_1} + (m_1 - n_1 \delta_1) V'''_1 = - \frac{g_1 \eta_1}{2} \frac{\partial (V''^2_1)}{\partial t} + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^2 (V''^2_1)}{\partial x_1^2} \\ + \alpha_1 \frac{\partial^2 (U_1 V''_1)}{\partial x_1^2} + j_1 \varepsilon_1 \frac{\partial (V''^2_1)}{\partial x_1} + 2 j_1 \varepsilon_1 \frac{\partial (U_1 V''_1)}{\partial x_1} + m_1^2 \beta_1 V''^2_1 .$$

. . . .

. . . .

$$g_2 \frac{\partial V''_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 V''_2}{\partial x_2^2} - 2 j_2 \frac{\partial V''_2}{\partial x_2} + (m_2 - n_2 \delta_2) V''_2 = - \frac{g_1 \eta_1}{2} \frac{\partial (V'^2_2)}{\partial t} + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^2 (V'^2_2)}{\partial x_2^2} \\ + \alpha_2 \frac{\partial^2 (U_2 V'_2)}{\partial x_2^2} + j_2 \varepsilon_2 \frac{\partial (V'^2_2)}{\partial x_2} + 2 j_2 \varepsilon_2 \frac{\partial (U_2 V'_2)}{\partial x_2} + m_2^2 \beta_2 V'^2_2 .$$

$$g_2 \frac{\partial V'''_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 V'''_2}{\partial x_2^2} - 2 j_1 \frac{\partial V'''_2}{\partial x_2} + (m_2 - n_2 \delta_2) V'''_2 = - \frac{g_2 \eta_2}{2} \frac{\partial (V''^2_2)}{\partial t} + \frac{\alpha_2}{2} \frac{\partial^2 (V''^2_2)}{\partial x_2^2} \\ + \alpha_2 \frac{\partial^2 (U_2 V''_2)}{\partial x_2^2} + j_2 \varepsilon_2 \frac{\partial (V''^2_2)}{\partial x_2} + 2 j_2 \varepsilon_2 \frac{\partial (U_2 V''_2)}{\partial x_2} + m_2^2 \beta_2 V''^2_2 .$$

. . . .

. . . .

Da questi sistemi si dedurranno coll' approssimazione che si vorrà le soluzioni particolari $V_1^{(n)}$ e $V_2^{(m)}$ che soddisfino alle condizioni ($1'_1$), ($1'_2$), ($2'$) e ($3'$).

Mediante queste soluzioni particolari si dovrà cercare di formare le soluzioni generali V_1 e V_2 soddisfacenti alle condizioni iniziali ($4'$). Volendo

eseguire il calcolo accennato si incontreranno le due seguenti difficoltà: 1° Si dovrà determinare le costanti di ogni soluzione particolare $V_1^{(n)}$ e $V_2^{(n)}$ in modo che siano soddisfatte le condizioni $(1_1')$, $(1_2')$, $(2')$ e $(3')$, mentre le due ultime di esse, speciali di alcuni fenomeni che avvengono nei corpi eterogenei, furono fino ad ora solo considerate in generale nella deduzione della forma stazionaria dei detti fenomeni (1). 2° Si dovrà colle soluzioni approssimate particolari $V_1^{(n)}$ e $V_2^{(n)}$ dedurre le soluzioni generali V_1 e V_2 che soddisfino alle condizioni iniziali, cosa che in generale non si saprà eseguire.

Osserviamo però che l'aver assunti i coefficienti k, h, w, c, e σ come funzioni della temperatura, invece che costanti, modifica assai i risultati esprimenti lo stato termico stazionario e quindi anche quelli esprimenti lo stato variabile, in quanto che lo stato a cui esso tende col crescere del tempo si trova modificato. Però il modo con cui questo stato variabile tende al suo stato finale, è pochissimo modificato, come si potrà facilmente vedere, sia col calcolo, che coll'esperienza; basterà quindi per avere una soluzione fisicamente abbastanza esatta arrestarsi al primo grado di approssimazione tanto nella determinazione delle soluzioni particolari, quanto in quella delle soluzioni generali. Si potrà però sempre usare le equazioni che abbiamo stabilite per determinare delle correzioni; ma per ciò basteranno i metodi ordinarî.

Il problema si trova quindi ridotto alla ricerca di soluzioni particolari delle equazioni (I_{bis}), che soddisfacciano alle condizioni $(1'_1)$, $(1'_2)$, $(2')$, e $(3')$; ed alla formazione della soluzione generale soddisfacente alla condizione $(4')$.

Soluzioni particolari delle (I_{bis}), sono le seguenti:

$$V_1' = e^{-j_1 x_1}\left[A_1 \operatorname{sen} \sqrt{\mu_1^2 - j_1^2}\, x_1 + B_1 \cos \sqrt{\mu_1^2 - j_1^2}\, x_1\right] e^{-\left(\frac{\mu_1^2}{g_1} + \frac{m_1^2 - n_1 \delta_1}{g_1}\right)t}$$

$$V_2' = e^{-j_2 x_2}\left[A_2 \operatorname{sen} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 + B_2 \cos \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2\right] e^{-\left(\frac{\mu_2^2}{g_2} + \frac{m_2^2 - n_2 \delta_2}{g_2}\right)t}$$

in cui A_1, A_2, B_1, B_2, μ_1 e μ_2 indicano costanti arbitrarie.

Le condizioni $(1'_1)$ e $(1'_2)$ esigono che siano:

$$B_1 = 0 \;, \quad B_2 = - A_2 \operatorname{tang} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2} \,.$$

Ora bisogna disporre delle rimanenti costanti in modo da soddisfare alle condizioni $(2')$, $(3')$ e $(4')$.

Per questo farò uso di un caso speciale di un metodo di determinazione delle costanti degli integrali particolari di una classe di equazioni alle derivate parziali; il quale metodo credo assai utile nello studio di alcuni fenomeni, che avvengono in corpi eterogenei e spero di poter presto pubblicare in forma più generale.

(1) Vedi p. e. *La théorie mathématique de la chaleur* di Poisson.

Siccome però, in causa del grande numero di coefficienti che abbiamo voluto considerare, i calcoli sarebbero troppo complicati per poter interessare, mi limiterò ad indicare esattamente la via da seguire, riserbandomi di dare i risultati completi quando applicherò le formole a casi pratici.

Soluzioni particolari delle (I_{bis}) soddisfacenti alle ($1'_1$) e ($2'_2$) sono:

$$V_1' = e^{-j_1 x_1} A_1 \operatorname{sen} \sqrt{\mu_1^2 - j_1^2}\, x_1 \,.\, e^{-\left(\frac{\mu_1^2}{g_1} + \frac{m_1^2 - n_1 \delta_1}{g_1}\right)t}$$

$$V_2' = e^{-j_2 x_2} A_2 \left(\operatorname{sen} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 - \operatorname{tang} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, l_2 \,.\, \cos \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 \right) .$$

$$.\, e^{-\left(\frac{\mu_2^2}{g_1} + \frac{m_2^2 - n_2 \delta_2}{g_1}\right)} .$$

In esse μ_1, μ_2 A_1 ed A_2 sono costanti arbitrarie. Potendone quindi disporre, definiamo una quantità z^2 come radice di una certa equazione trascendente da stabilirsi e poniamo inoltre:

$$(a) \qquad z^2 = \frac{\mu_1^2}{g_1} + \frac{m_1^2 - a_1 \delta_1}{g_1} = \frac{\mu_2^2}{g_2} + \frac{m_2^2 - n_2 \delta_2}{g_2} .$$

Se questo sarà, come vedremo, possibile, la quantità z^2 avrà un' infinità di determinazioni, che indicheremo con z^2_ν; le corrispondenti μ diverranno rispettivamente $\mu_{1\nu}$ e $\mu_{2\nu}$.

Le soluzioni generali potranno quindi rappresentarsi colle seguenti formole:

$$V_1 = e^{-j_1 x_1} . \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\, e^{-z_\nu^2 t} \,.\, A_{1\nu} \operatorname{sen} \sqrt{\mu^2_{1\nu} - j_1^2}\;\, x_1$$

$$V_2 = e^{-j_2 x_2} . \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu e^{-z_\nu^2 t} . A_{2\nu} \left(\operatorname{sen} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}\, x_2 - \operatorname{tang} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}\, l_2 . \cos \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}\, x_2 \right) .$$

Essendo z^2_ν e M_ν indipendenti dall' indice *uno* o *due* per definizione, le condizioni (2′) e (3′) diverranno approssimativamente:

$$e^{-j_1 x_1} A_{1\nu} \operatorname{sen} \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j^2_1}\, l_1 = - e^{-j_1 x_1} A_{2\nu} \operatorname{tang} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}\, l_2$$

$$(b) \quad A_{\nu 1} k_1\, e^{-j_1 l_1} \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2} \cos \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2}\, l_1 - A_{1\nu} k_1 j_1\, e^{-j_1 l_1} \operatorname{sen} \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2}\, l =$$

$$= A_{2\nu} k_2 \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2} + A_{2\nu} k_2 j_2 \operatorname{tang} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2}\, l_2 .$$

Coll' aiuto della prima di queste due equazioni eliminiamo $A_{2\nu}$ dalla seconda; essa, divisi i due membri per $A_{1\nu}$, ci darà la seguente equazione trascendente:

$$k_1\, e^{-j_1 l_1} \left[\frac{\sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2}}{\operatorname{tang} \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2}\, l_1} - j_1 \right] = - k_2 \left[\frac{\sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}}{\operatorname{tang} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j^2_2}\, l_1} - j_2 \right] .$$

Esprimiamo quest' ultima in funzione della sola radice z_ν^2, facendo uso delle due equazioni (a); avremo così stabilita l'equazione trascendente, che volevamo.

Deduciamo le radici z^2_ν; per mezzo di esse determiniamo le corrispondenti $\mu_{1\nu}$ e $\mu_{2\nu}$. Ci rimane ora a determinare le costanti $A_{1\nu}$ e M_ν, che sono tuttora arbitrarie in modo che siano soddisfatte le condizioni per $t = 0$. Si avrà:

$$-S_1 e^{-j_1 x_1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu A_{1\nu} \operatorname{sen} \sqrt{\mu^2_\nu - j^2_1}\, x_1$$

$$-S_1 e^{-j_2 x_2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu A_{1\nu}\left(\operatorname{sen}\sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 - \operatorname{tang}\sqrt{\mu_2^2 - j^2_2}\, l_2 . \cos\sqrt{\mu_2^2 - j_2^2} x_2\right).$$

Ricordiamo che U. Dini ha mostrato come si possa sviluppare una funzione data arbitrariamente in un certo intervallo, secondo la serie:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \operatorname{sen} \lambda_n x),$$

quando le quantità λ_n sono radici reali di una equazione della forma:

$$F_2(z) + F_1(z) \operatorname{sen} \pi z + F(z) \cos \pi z = 0,$$

in cui le funzioni F_2, F_1 e F devono soddisfare ad alcune condizioni generali [1].

Ora basterà che noi formiamo due equazioni della forma voluta dalla teoria di Dini e che ammettono rispettivamente per radici le quantità:

$$\sqrt{\mu^2_{1\nu} - j_1^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\mu^2_{2\nu} - j_2^2};$$

ciò potendosi sempre eseguire con sufficiente approssimazione, si potrà determinare coll' elegante metodo di Dini i coefficienti dello sviluppo; i quali per noi saranno le quantità:

$$M_\nu A_{1\nu} \quad \text{ed} \quad M_\nu A_{2\nu}.$$

Si avranno così per ogni ν due equazioni, che unite alla prima delle equazioni (b) ci daranno tutti i coefficienti voluti.

Il problema, prescindendo dalla complicazione del calcolo può ritenersi completamente risolto.

Caso speciale. — Consideriamo ora in modo analogo che per lo stato stazionario il caso speciale in cui nel conduttore intervengano così piccole differenze di temperatura che i coefficienti k, h, e ω possano essere con-

[1] Vedi U. Dini, *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale.*

siderati come costanti e che l' effetto Thomson sia nullo. Le equazioni differenziali delle temperature u_1 ed u_2 e le relative condizioni saranno le seguenti:

$$(5_1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{k_1}{c_1\varrho_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{h_1 p}{c_1\varrho_1 q}u_1 + i^2\frac{\omega_1}{\mathrm{I}c_1\varrho_1 q^2};$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{k_2}{c_2\varrho_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{h_2 p}{c_2\varrho_2 p}u_2 + i^2\frac{\omega_2}{\mathrm{I}c_2\varrho_2 q^2} \quad (5_2)$$

$$(6_1) \quad x_1 = 0\ ,\ u_1 = 0 \text{ per ogni } t; \qquad x_2 = l_2\ ,\ u_2 = 0 \text{ per ogni } t; \quad (6_2)$$

$$(7) \qquad (u_1)_{l_1} = (u_2)_0 \text{ per ogni } t;$$

$$(8) \qquad \mathrm{P}\frac{i}{q} = k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{l_1} - k_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_0 \text{ per ogni } t;$$

$$(9) \qquad t = 0 \qquad u_1 = u_2 = 0 \text{ per ogni } x_1 \text{ ed } x_2 .$$

Posiamo $u_1 = \mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1$; $u_2 = \mathrm{U}_2 + \mathrm{V}_2$ intendendo di rappresentare con U_1 ed U_2 lo stato stazionario noto; le equazioni (5_1) e (5_2) si divideranno ciascuna in due parti, di cui le prime saranno rispettivamente le equazioni dello stato stazionario già integrate e le seconde saranno:

$$(5'_1) \quad \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial x_2^1}\frac{k_1}{c_1\varrho_1} - \mathrm{V}_1\frac{h_1 p}{c_1\varrho_1 q} \quad ; \quad \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}_2}{\partial x_2^2}\frac{k_2}{c_2\varrho_2} - \mathrm{V}_2\frac{h_2 p}{c_2\varrho_2 q}; \quad (5'_2)$$

alle quali corrisponderanno le condizioni:

$$(6'_1) \quad x_1 = 0\ ,\ \mathrm{V}_1 = 0 \text{ per ogni } t, \qquad x_2 = l_2\ ,\ \mathrm{V}_2 = 0 \text{ per ogni } t \quad (6'_2)$$

$$(7') \qquad (\mathrm{V}_1)_{l_1} = (\mathrm{V}_2)_0 \text{ per ogni } t$$

$$(8') \qquad 0 = k_1\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_1}\right)_{l_1} - k_2\left(\frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial x_2}\right)_0 \text{ per ogni } t$$

$$(9') \quad t = 0\ ,\ \mathrm{V}_1 = -\mathrm{U}_1 \text{ per ogni } x_1\ ,\ \mathrm{V}_2 = -\mathrm{U}_2 \text{ per ogni } x_2 .$$

Soluzioni particolari delle $(5'_1)$ e $(5'_2)$ sono rispettivamente:

$$\mathrm{V}_1 = [\mathrm{A}_1 \operatorname{sen} m_1 x_1 + \mathrm{B}_1 \cos m_1 x_1]\, e^{-\frac{k_1}{c_1\varrho_1}(m_1^2+\lambda_1^2)t},$$

$$\mathrm{V}_2 = [\mathrm{A}_2 \operatorname{sen} m_2 x_2 + \mathrm{B}_2 \cos m_2 x_2]\, e^{-\frac{k_2}{c_2\varrho_2}(m_2^2+\lambda_2^2)t},$$

in cui A_1, B_1, A_2, B_2, m_1 ed m_2 indicano costanti arbitrarie ed in cui si pose:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{h_1 p}{k_1 q}} \quad , \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{h_2 p}{k_2 q}} .$$

Posiamo:

$$\frac{k_1}{c_1\varrho_1}(m_1^2+\lambda_1^2)=\frac{k_2}{c_2\varrho_2}(m_2^2+\lambda_2^2)=z^2,$$

intendendo di rappresentare con z^2 le radici di un' equazione trascendente da stabilirsi.

Le condizioni $(6_1')$ e $(6_2')$ esigono che siano:

$$B_1=0\ ,\quad B_2=-A_2 \operatorname{tang} m_2 l_2$$

Le soluzioni generali saranno quindi:

$$V_1=\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu e^{-z_\nu^2 t} A_{1\nu} \operatorname{sen} m_{1\nu} x_1$$

$$V_2=\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu e^{-z_\nu^2 t} A_{2\nu} (\operatorname{sen} m_{2\nu} x_2-\operatorname{tang} m_{2\nu} l_2 \,.\, \cos m_{2\nu} x_2)\,.$$

Le condizioni (7') ed (8') diverranno quindi:

$$A_{1\nu} \operatorname{sen} m_{1\nu} l_1=-A_{2\nu} \operatorname{tang} m_{2\nu} l_2$$
$$k_1 A_{1\nu} m_{1\nu} \cos m_{1\nu} l_1=k_2 A_{2\nu} m_{2\nu}\,.$$

Da esse si dedurrà una relazione fra $A_{1\nu}$ ed $A_{2\nu}$ e l' equazione trascendente in z^2:

$$\frac{\operatorname{tang}\sqrt{z^2-\lambda_1^2}\,l_2}{\sqrt{z^2-\lambda_1^2}}=-\frac{\operatorname{tang}\sqrt{z^2-\lambda_2^2}\,l_2}{\sqrt{z^2-\lambda_2^2}},$$

dalle cui radici si determineranno $m_{1\nu}$ e $m_{2\nu}$

Si dovrà infine, procedendo come è stato detto per il caso generale, soddisfare alle condizioni (9'), le quali divengono:

$$-S_1=\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu A_{1\nu} \operatorname{sen} m_{1\nu} x_1$$

$$-S_2=\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu A_{2\nu} (\operatorname{sen} m_{2\nu} x_2-\operatorname{tang} m_{2\nu} l_2 \cos m_{2\nu} x_2)\,.$$

Ma qui il calcolo non può più proseguirsi che numericamente.

Patologia. — *Un parassita del globulo rosso in una specie di pipistrello* (*Miniopterus Schreibersii* Kuhl.). Nota preliminare del dott. ANTONIO DIONISI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Le ricerche praticate da varî autori, con lo scopo di trovare animali suscettibili di contrarre l' infezione malarica, non ebbero risultato favorevole. Così pure non è stato possibile trovare animali, i quali spontaneamente albergassero nel loro sangue i parassiti malarici dell' uomo.

Con numerosissime ricerche si è stabilita l' esistenza di parassiti del sangue, più o meno simili, secondo alcuni, differenti, secondo altri, ai parassiti malarici dell' uomo in molte specie di uccelli e in alcuni rettili.

Recentemente osservazioni su alcuni mammiferi, bue, cane, pecora, scimia hanno dimostrato che in questi animali si trovano pure parassiti, che si avvicinano molto a quelli dell' uomo.

Ma l' opinione che prevale, e che è stata recentemente sostenuta anche da Koch, è che i parassiti del sangue hanno un solo ospite, e che per il parassita della malaria l' unico ospite è l' uomo.

A me è accaduto di trovare nel sangue del *Miniopterus Schreibersii* Kuhl, catturato nella Campagna romana, un parassita endoglobulare che per forma, grandezza e struttura rassomiglia molto al parassita della febbre quartana.

Nella maggior parte dei Chirotteri appartenenti a questa specie le forme parassitarie si trovavano nel sangue periferico con notevole frequenza, ma non in numero considerevole.

Ho potuto osservare finora: delle forme parassitarie pigmentate occupanti $^1/_3$ o $^2/_3$ del globulo rosso, che non appare aumentato di volume: i granuli di pigmento nero sono piuttosto grossi e poco mobili, somigliantissimi a quelli della quartana: delle forme occupanti pressochè interamente il globulo rosso, e delle forme libere pigmentate, alcune delle quali in disgregazione. In alcune forme adulte ho osservato l' inizio della sporulazione. Nel sangue periferico si notano leucociti contenenti granuli di pigmento nero.

I dettagli di struttura e di sviluppo saranno oggetto di un prossimo scritto.

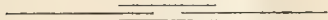
Quanto ho potuto raccogliere su questa specie di pipistrello è nel lavoro di Doria, *Chirotteri in Liguria* (Annali del Museo civico di storia naturale di Genova, anno 1886). Questa specie ha una grande area di diffusione, trovandosi in Europa, Asia, Africa e Australia.

La caccia più opportuna di questo mammifero si fa in autunno avanzato, epoca nella quale esso cade in letargo invernale. Delle abitudini si conosce poco.

Fu scoperto un fatto assai interessante da Van Beneden, che cioè la fecondazione in questi animali ha luogo in primavera, dopo che gli spermatozoidi, in seguito all' accoppiamento autunnale, sono rimasti tutto l' inverno nell' utero della femmina, conservando la loro vitalità.

Si svegliano dal letargo ai primi di aprile: durante il letargo soggiornano nelle grotte.

Con questa osservazione rimane stabilita l' esistenza nel *Miniopterus Schreibersii* Kuhl di un parassita endoglobulare molto somigliante a quello che produce nell' uomo la febbre quartana.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 novembre 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Come i tubi scemano la virtù scaricatrice dei raggi X.* Nota del Socio Emilio Villari.

Fisica. — *Su una Nota del prof. de Heen dell' Università di Liegi dal titolo « Quelques observations sur le radiations infra-électriques et sur les expériences de M. E. Villari ».* Osservazioni del Socio Emilio Villari.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui sistemi di ipersuperficie di* S_r *aventi le stesse prime polari.* Nota 1ª del Corrispondente E. Bertini.

In una Nota pubblicata negli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino (1897) determinai tutti i sistemi di curve piane che hanno le stesse prime polari. Qui estendo la questione alle ipersuperficie (d' ordine n) V^n_{r-1} di uno spazio a qualunque numero r di dimensioni S_r: e in questa Nota 1ª dimostro alcune proprietà generali: cioè che una delle dette V^n_{r-1} è caratterizzata dall' ammettere un certo sistema di quadriche apolari; che tutte le V^n_{r-1}, rispetto a cui è apolare un cosifatto sistema, in un caso formano un solo sistema lineare, che dico $\varDelta$, costituito appunto di V^n_{r-1} aventi le medesime prime polari, mentre in ogni altro caso si distribuiscono in infiniti sistemi $\varDelta$;

che tutte le V^n_{r-1} di un sistema $\varDelta$ si ottengono da una di esse per le trasformazioni omografiche di un gruppo coi medesimi spazî fondamentali, ecc. In una 2ª Nota darò le formole per $r=3$, avendo già date quelle per $r=1, 2$ nella succitata Nota dell'Accad. di Torino. I casi possibili sono 13 e si hanno corrispondentemente 13 tipi di sistemi $\varDelta$, dei quali cinque ∞^3, quattro ∞^2 e quattro ∞^1.

1. *La corrispondenza fra i poli e le prime polari rispetto ad una* V^n_{r-1} *non è biunivoca nel solo caso che* V^n_{r-1} *sia un cono, cioè possegga un* S_{h-1} n^{uplo} $(h=1, 2, \ldots r)$. Infatti la prima polare di un punto n^{uplo} è indeterminata. Che se due punti $(x_0=x_1=\cdots=x_r=0,\ x_0=x_1=\cdots=x_{r-1}=x_{r+1}=0)$ hanno, rispetto ad una V^n_{r-1}, di equazione $f=0$, la stessa prima polare, deve essere $\lambda \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} = \mu \frac{\partial f}{\partial x_r}$ cioè $\mu \frac{\partial f}{\partial x_r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} = 0$, onde è indeterminata la prima polare del punto $(0\ 0 \ldots 0\ \mu - \lambda)$ e però ecc.

Le V^n_{r-1} che sono coni hanno le medesime prime polari, cioè tutte le V^{n-1}_{r-1} di S_r. Se due V^n_{r-1} (che non sono coni) hanno le medesime prime polari, fra i loro poli sussisterà una omografia non degenere.

2. *Le* V^n_{r-1} *che hanno le medesime prime polari costituiscono un sistema lineare*, che s'indica con $\varDelta$. Infatti se $f=0, f_1=0, \ldots$ hanno le stesse prime polari, cioè le ipersuperficie $\varDelta_y f=0$, $\varDelta_y f_1=0, \ldots$ [1] appartengono allo stesso sistema lineare ∞^r, a questo appartiene pure la $\varDelta_y(\lambda f + \mu f_1 + \cdots) = 0$, qualsiansi $\lambda, \mu, \ldots$ e però $\lambda f + \mu f_1 + \cdots = 0$ ha le stesse prime polari di $f=0, f_1=0, \ldots$ In seguito escludiamo i sistemi $\varDelta$, nei quali *ogni* V^n_{r-1} possiede punto n^{uplo}.

3. Un punto unito dell'omografia dei poli, rispetto a due V^n_{r-1} colle stesse prime polari, è pure punto unito della omografia dei poli rispetto a due V^n_{r-1} qualunque del loro fascio (giacchè esso ha, rispetto alle V^n_{r-1} di questo fascio, una stessa prima polare). Inoltre, *affinchè un punto sia unito in tale omografia è condizione necessaria e sufficiente che sia* n^{uplo} *per una* V^n_{r-1} *del fascio*. Infatti, se si ha identicamente $\lambda \varDelta_y f = \mu \varDelta_y f_1$, segue $\varDelta_y(\lambda f - \mu f_1) = 0$: e viceversa, da questa identità si passa a quella.

4. Consideriamo il sistema di punti uniti relativi ad un fascio di un sistema $\varDelta$. Limitandoci alle cosidette omografie generali, dalle quali si ottengono tutte le altre come casi limiti, è noto [2] che questi punti uniti si distribuiscono in spazî, *fondamentali*, $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$ appartenenti ad S_r e tali che $\Sigma h^{(i)} = r+1$; e inoltre che ad ogni spazio fondamentale $S_{h^{(i)}-1}$ corrisponde uno spazio, *coniugato*, di piani uniti, al cui sostegno $S_{r-h^{(i)}}$ appartengono gli altri spazî fondamentali.

[1] Si pone $\varDelta_y f = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + y_{r+1} \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}$.

[2] Cfr. Predella, *Le omografie in uno spazio a qualunque numero di dimensioni* (Annali di Matem., t. 17), ove sono citati i precedenti lavori di Segre.

Or bene: risulterà dalle cose seguenti che al variare in A di un suo fascio generico (e basta di un fascio in cui σ è massimo) rimane fisso il detto sistema di punti uniti, e che quindi ad ogni sistema A è collegato un determinato sistema di punti che sono i punti uniti dell'omografia dei poli di due sue V^n_{r-1} generiche. S'intende che per V^n_{r-1} particolari possono aggiungersi altri punti uniti.

Con A' s'indichi il più ampio sistema situato in A e che comprende un suo fascio (generico ma determinato), così che gli spazî fondamentali relativi a due V^n_{r-1} generiche di A' sieno quelli $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$ relativi al fascio. Poichè si proverà che $A' = A$, si avranno, nelle proprietà che ora dimostreremo, proprietà di A.

5. Si prendano $r+1$ punti indipendenti:

$$P'_1, P'_2, \dots P'_h \text{ in } S_{h'-1}, \; P''_1, P''_2, \dots P''_{h''} \text{ in } S_{h''-1}, \dots$$

La prima polare di P'_1 (ad es.), che è comune a tutte le V^n_{r-1} di A', deve avere in $S_{h''-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$ spazî $(n-1)^{\text{upli}}$, perchè i punti di questi spazî sono n^{upli} per particolari di quelle superficie (n. 3), cioè deve avere $S_{r-h'}$ come spazio $(n-1)^{\text{uplo}}$ (essendo $(n-1)^{\text{upli}}$ $r-h'+1$ punti indipendenti di esso). Adunque la detta prima polare di P'_1 si ottiene proiettando da $S_{r-h'}$ una ipersuperficie di $S_{h'-1}$: e analogamente può dirsi delle prime polari di $P'_2, \dots P'_{h'}, P''_1, \dots P''_{h''}, \dots$ Inoltre queste $r+1$ prime polari sono linearmente indipendenti e individuano quindi il sistema delle prime polari delle V^n_{r-1} di A'.

Ora facciasi una delle $\infty^{\sigma-1}$ trasformazioni omografiche che ammettono i detti spazî fondamentali $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$. Sono $\infty^{\sigma-1}$ perchè ad un punto X può farsi corrispondere un punto qualunque X′ dello spazio $S_{\sigma-1}$ comune ai σ spazî $S_{r-h^{(i)}+1}$ che projettano da X gli spazî $S_{r-h^{(i)}}$, o anche per le formole (ridotte) di quelle omografie riferite alla piramide dei punti P, formole che sono ($a_1, a_2 \dots a_\sigma$ pararametri):

$$(1) \quad x_1 = a_1 y_1, \dots x_{h'} = a_1 y_{h'}, \; x_{h'+1} = a_2 y_{h'+1}, \dots x_{h'+h''} = a_2 y_{h'+h''}, \dots$$

Per una tale trasformazione una V^n_{r-1} di A' si trasforma in un'altra che ha le stesse prime polari di quella ed anzi ha con quella gli stessi spazî fondamentali (o, in casi particolari, spazî fondamentali comprendenti questi), perchè le prime polari dei punti P manifestamente non cangiano per detta trasformazione. E però *le trasformate, per le dette $\infty^{\sigma-1}$ omografie, delle V^n_{r-1} di A' appartengono pure a A'* (cfr. n. 10).

6. Delle considerate omografie infinite contengono altri punti uniti ed infinite sono degeneri. Si aggruppino in qualsivoglia modo i σ spazî $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$, per es. in $\sigma-\tau+1$ gruppi, e si prendano per spazî fondamentali gli spazî a cui appartengono rispettivamente quelli di ciascun gruppo (cioè nelle (1)

si prendano per le a_i soltanto $\sigma - \tau + 1$ valori diversi), si otterranno $\infty^{\sigma-\tau}$ delle sunnominate omografie.

In particolare si considerino quelle che hanno (ad es.) per spazî fondamentali S_{k-1}, $S_{h^{(\tau+1)}-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$, dei quali il primo sia individuato dagli spazî $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\tau)}-1}$ (onde si ha $h' + h'' + \cdots + h^{(\tau)} = k$). Basta far corrispondere ad un punto X un punto X' di $S_{\sigma-\tau}$ (contenuto in $S_{\sigma-1}$) comune agli spazî proiettanti da X gli spazî che si ottengono dai detti $\sigma - \tau + 1$ presi a $\sigma - \tau$. Che se il punto X' si sceglie nello spazio $S_{\sigma-\tau-1}$ intersezione di $S_{\sigma-\tau}$ e di $S_{r-k} = S_{h^{(\tau+1)}-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$ (ovvero nelle (1) si fa $a_1 = a_2 = \cdots = a_\tau = 0$) si ha una omografia degenere cogli spazî singolari S_{k-1}, S_{r-k}, così che ad ogni punto di S_{k-1} corrisponde S_r e ad $S_k = XS_{k-1}$ corrisponde X'.

Applichisi questa omografia degenere ad una $V^n{}_{r-1}$ di A'. La $V^n{}_{r-k-1}$ in cui essa taglia S_{r-k} si trasforma in una $V^n{}_{r-1}$ di A', per la quale S_{k-1} è spazio n^{uplo}. Dunque *al sistema A' appartengono $V^n{}_{r-1}$ che hanno n^{upli} gli spazî $S_{k-1} = S_{h'+h''+\ldots+h^{(\tau)}-1}$ determinati da $\tau (< \sigma)$ qualunque degli spazî fondamentali* $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$ (cfr. n. 11).

7. Consideriamo σ $V^n{}_{r-1}$ di A' aventi ordinatamente spazî n^{upli} in $S_{r-h'}$, ... $S_{r-h^{(\sigma)}}$; le quali rappresenteremo brevemente con W_1, W_2, ... W_σ. Una qualunque W_1, ad es., non può essere contenuta nel sistema lineare di tutte o parte delle rimanenti: perchè, oltre lo spazio $S_{n-h'}$, la W_1 avrebbe allora n^{uplo} anche lo spazio $S_{h'-1}$ (almeno) comune a W_2, ... W_σ, il che è assurdo (risultandone che ogni punto di S_r dovrebbe essere n^{uplo} per W_1). Ne discende che in A' esistono $\infty^{\sigma-1}$ $V^n{}_{r-1}$, cioè quelle del sistema lineare individuato dalle W_i. Che non ve ne esistano altre si può vedere colla seguente considerazione. Un punto X, polo di una prima polare V^{n-1}_{r-1} rispetto ad una $V^n{}_{r-1}$, quando V^{n-1}_{r-1} resti fissa e $V^n{}_{r-1}$ descriva A', prende posizioni corrispondenti ad X in omografia di cui sono $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$ spazî fondamentali, cioè varia in $S_{\sigma-1}$, onde le $V^n{}_{r-1}$ di A' non possono essere più che $\infty^{\sigma-1}$. Si conclude che *il sistema A' è $\infty^{\sigma-1}$ ed è individuato dalle σ ipersuperficie* W_i: e quindi che *in ogni spazio fondamentale* $S_{h^{(i)}-1}$ *esiste una varietà base $V^n{}_{h-2}$ del sistema A'*: cioè quella in cui $S_{h^{(i)}-1}$ è segato dalla W_i. Anzi, essendo ogni punto di $S_{h^{(i)}-1}$ n^{uplo} per W_1, ... W_{i-1}, W_{i+1}, ... W_σ, si vede che *ciascun punto della varietà base di* $S_{h^{(i)}-1}$ *congiunto collo spazio coniugato* $S_{r-h^{(i)}}$ *dà un* $S_{r-h^{(i)}+1}$ *che sega tutte le $V^n{}_{r-1}$ di A'* in $V_{r-h^{(i)}}$ *aventi quel punto n^{uplo}.*

Ne discende anche che esiste un solo sistema W_1, W_2, ... W_σ di $W^n{}_{r-1}$ aventi in $S_{r-h'}$, ... $S_{r-h^{(\sigma)}}$ spazî n^{upli}.

8. Viceversa, prendendo σ spazî $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$ appartenenti ad S_r e tali che $\Sigma h^{(i)} = r + 1$, e detti $S_{r-h'}$, ... $S_{r-h^{(\sigma)}}$ gli spazî determinati da essi presi a $\sigma - 1$, le σ ipersuperficie W_1, ... W_σ d'ordine n, aventi rispettivamenti n^{upli} questi spazî e del resto qualunque (ma determinate) individuano un sistema A'. Infatti, presi $r + 1$ punti come si è detto nel n. 5,

le prime polari di $P'_1, \dots P'_h$ rispetto alle V^n_{r-1} del sistema sono quelle rispetto a W_1; così le prime polari di $P''_1, \dots P''_{h''}$ sono quelle rispetto a W_2; ecc. Si ha adunque un solo sistema di prime polari e l'omografia dei poli di due V^n_{r-1} (generiche) ha gli spazî fondamentali $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$.

9. Per essere le V^n_{r-1} di $\mathit{\Lambda}'$ precisamente $\infty^{\sigma-1}$, una considerazione fatta nel n. 7 conduce ad un'altra conseguenza utile in seguito. Mentre V^n_{r-1}, partendo da una posizione generica, descrive $\mathit{\Lambda}'$, il polo X di una polare fissa V^{n-1}_{r-1} deve descrivere $S_{\sigma-1}$; e si hanno come omografie di poli *tutte* le $\infty^{\sigma-1}$ che posseggono i considerati spazî fondamentali. Ossia: *ogni omografia con tali spazî fondamentali è omografia dei poli di due* V^n_{r-1} di $\mathit{\Lambda}'$, *delle quali una sia scelta genericamente.*

10. Si può ora completare la proprietà del n. 5. Il nostro sistema $\mathit{\Lambda}'$, prendendo le W_i a rappresentare anche i primi membri delle equazioni delle relative ipersuperficie rispetto alla piramide fondamentale dei punti P, ha l'equazione

$$\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \cdots + \lambda_\sigma W_\sigma = 0 .$$

Applichiamo una trasformazione (1): si trova (essendo $S_{n-h'}$ spazio n^{uplo} per W_1, cioè questa funzione omogenea di ordine n delle sole $x_1, x_2, \dots x_{h'}$; ecc.)

$$\lambda_1 a^n_1 W_1 + \lambda_2 a^n_2 W_2 + \cdots + \lambda_\sigma a^n_\sigma W_\sigma = 0$$

cioè lo stesso sistema $\mathit{\Lambda}'$, per essere le a_i arbitrarie. Adunque *le* V^n_{r-1} *di un sistema* $\mathit{\Lambda}'$ *provengono da una di esse per le trasformazioni omografiche che hanno gli spazî fondamentali* $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$.

Però dal confronto delle due equazioni precedenti segue che non una sola, ma in generale più e precisamente $n^{\sigma-1}$ di queste omografie trasformano l'una nell'altra due V^n_{r-1} di $\mathit{\Lambda}'$: onde si ottengono per una tale V^n_{r-1} altrettante trasformazioni omografiche in sè (coi detti spazî fondamentali), che in generale formano un sottogruppo delle trasformazioni omografiche in sè della ipersuperficie.

11. E anche la proprietà del n. 6 può essere completata. Infatti dalla equazione superiore del sistema $\mathit{\Lambda}'$ si trae immediatamente (dovendo essere $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\tau = 0$) che *le* V^n_{r-1} *di* $\mathit{\Lambda}'$ *che hanno* n^{uplo} *lo spazio* $S_{k-1} = S_{h'+h''+\dots+h^{(\tau)}-1}$ *sono* $\infty^{\sigma-\tau-1}$. Ad es. sono $\infty^{\sigma-2}$ quelle che hanno n^{uplo} uno spazio fondamentale.

12. Si mostrerà adesso che esternamente ad un sistema $\mathit{\Lambda}'$ non esistono ipersuperficie che abbiano con quelle di $\mathit{\Lambda}'$ le medesime prime polari, ossia che $\mathit{\Lambda} = \mathit{\Lambda}'$, come si affermò nel n. 4. Si deve eccettuare il caso $n = 2$, nel quale manifestamente il teorema non sussiste.

Sia $\Omega = 0$ una ipersuperficie che ha le stesse prime polari di quelle

di $\mathcal{A}'$. Dovrà essere (mantenendo la piramide fondamentale già detta ed essendo a_{ki} coefficienti numerici):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} + \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k1} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \cdots$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k2} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} + \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k2} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \cdots$$

. . . .

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'}} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{kh'} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} + \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{kh'} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \cdots$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'+1}} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} + \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \cdots$$

. . . .

Dico che, esclusi i coefficienti $a_{k1}\, a_{k2} \ldots a_{kh'}$ $(k=1,2 \ldots h')$, $a_{k,h'+1}\, a_{k,h'+2} \ldots a_{k,h'+h''}$ $(k=h'+1, h'+2, \ldots h'+h'')$, ..., gli altri coefficienti a_{ki} sono nulli. Considerando, ad es., i coefficienti $a_{k,h'+1}$ $(k=1,2,\ldots h')$, si derivino le prime h' delle precedenti relazioni rispetto ad $x_{h'+1}$ e la $(h'+1)^{\text{esima}}$ rispetto ad $x_1, x_2, \ldots x_{h'}$ e sottraggansi ordinatamente queste da quelle: si troverà

$$0 = \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{ki} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_k \, \partial x_{h'+1}} - \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k,h'+1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k \, \partial x_i} \quad (i=1,2,\ldots h').$$

Se $n > 2$, le due sommatorie di questa identità, contenendo variabili diverse, devono annullarsi separatamente. Si ha quindi identicamente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} = 0 \quad (i=1,2,\ldots h');$$

dalle quali segue che deve essere

$$\sum_{k=1}^{k=h'} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} = 0.$$

Ora, se non fossero i coefficienti $a_{k,h'+1}$ nulli, quest' ultima identità significherebbe che $W_1 = 0$ ha (almeno) un punto n^{uplo} in $S_{h'-1}$ e quindi ha n^{uplo} lo spazio $S_{n-h'+1}$ che congiunge questo punto ad $S_{n-h'}$, mentre, per le nostre ipotesi, è $S_{n-h'}$ il solo spazio n^{uplo} di W_1. Iu modo analogo si procede per

gli altri coefficienti da dimostrarsi nulli. Quindi le relazioni soprascritte devono essere

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'}} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{kh'} \frac{\partial W_1}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'+1}} = \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'+h''}} = \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_2}{\partial x_k},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Il primo gruppo di h' relazioni (e analogamente ogni altro gruppo) mostra che le prime polari dei punti di $S_{h'-1}$ rispetto ad $\Omega = 0$ sono quelle stesse di quei punti rispetto a $W_1 = 0$ (e quindi rispetto ad una V^n_{r-1} del nostro sistema $\mathcal{A}'$) cioè che $S_{h'-1}$ si trasforma in sè per l'omografia dei poli rispetto ad $\Omega = 0$, $W_1 = 0$. Limitandoci di nuovo alle omografie generali, diciamo $S_{h'_1-1}, S_{h'_2-1}, \dots$ $(h'_1 + h'_2 + \dots = h')$ gli spazi fondamentali di questa omografia e intendiamo che i punti $P'_1, P'_2, \dots P'_{h'_1}$ sieno presi in $S_{h'_1}$, i punti $P_{h'_1+1}$, $P_{h'_1+2}, \dots P_{h'_1+h'_2}$ in $S_{h'_2-1}$, ecc. Le precedenti relazioni diventeranno

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = a_{11} \frac{\partial W_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = a_{11} \frac{\partial W_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'_1}} = a_{11} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1}}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'_1+1}} = a_{h'_1+1, h'_1+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1+1}}, \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'+1}} = a_{h'+1, h'+1} \frac{\partial W_2}{\partial x_{h'+1}}, \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ma, continuando a tener presente il primo gruppo di h' relazioni (e ripetendo poi lo stesso per gli altri), si osservi che derivando $\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$ rispetto ad x_j e $\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}$ rispetto ad x_i e sottraendo si ottiene

$$\frac{\partial W_1}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots h'_1 \\ j = h'_1 + 1, \dots h'_1 + h'_2, \dots, h' \end{pmatrix}.$$

Ne risulta che

$$x_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \dots + x_{h'_1} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1}} = 0$$

(e similmente ripetasi per le altre analoghe equazioni) è una ipersuperficie

di ordine n che ha spazio n^{uplo} in $S_{r-h'}$ e in $S_{h'_2-1}$, $S_{h'_3-1}$, ... cioè nello spazio $S_{r-h'_1}$, al quale appartengono tutti gli spazî fondamentali, eccettuato $S_{h'_1-1}$. Sicchè, dalle ultime relazioni deducendosi, per il teorema di Eulero,

$$\Omega = a_{11}\left(x_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \cdots + x_{h'_1} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1}}\right) + a_{h'_1+1,\, h'_1+1}\left(x_{h'_1+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1+1}} + \right.$$

$$\left. + \cdots + x_{h'_1+h'_2} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1+h'_2}}\right) + \cdots\cdots$$

si conclude che Ω appartiene ad un sistema, il quale comprende A' (ottenendosi A' col fare ivi $a_{11} = a_{h'_1+1,\, h'_1+1} = \ldots$, ecc.) e quindi esiste in A, e che inoltre ha lo stesso carattere di A', gli spazî fondamentali essendo $S_{h'_1-1}$, $S_{h'_2-1}$, ... $S_{h''_1-1}$, $S_{h''_2-1}$, ... Ma ciò deve escludersi, perchè si disse nel n. 4 di prendere in A il sistema A' generico o avente σ massimo. Adunque Ω deve essere di A' e si ha $A = A'$: c. d. d.

13. Tenendo fissi gli spazî fondamentali $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$ e variando le ipersuperficie W_1, W_2, ... W_σ, varia il sistema A in una ∞^{μ}, essendo $\mu = \Sigma\binom{n + h^{(i)} - 1}{h^{(i)} - 1} - \sigma$ e la totalità delle V^n_{r-1} appartenenti a tali sistemi è $\infty^{\mu+\sigma-1}$. Soltanto quando sia $h' = h'' = \cdots = h^{(\sigma)} = 1$ (e quindi $\sigma = r + 1$) le W_i sono S_{r-1} n^{upli} e si ha un solo sistema A.

Si noti ora che la condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie inviluppo I^m_{r-1} di classe m sia apolare (coniugata se $m = n$) a tutte le V^n_{r-1} che hanno uno spazio S_{r-h} n^{uplo} (non contenuto in uno spazio n^{uplo} a maggior dimensione) è che all'inviluppo I^m_{r-1} appartenga la stella di iperpiani che ha S_{n-h} per sostegno (e basta che a quell'inviluppo appartengano $\binom{m + h - 1}{h - 1}$ iperpiani linearmente indipendenti della stella). Adunque *la totalità $\infty^{\mu+\sigma-1}$ di V^n_{r-1}, testè definita, è caratterizzata dall' ammettere come inviluppi apolari tutte le I^m_{r-1} che passano per le stelle d'iperpiani di sostegni $S_{n-h^{(i)}}$.*

Il valore minimo di m è 2. Le quadriche inviluppi che passano per le nominate stelle variano in una totalità infinita $\frac{r(r+3)}{2} - \sum \frac{h^{(i)}(h^{(i)}+1)}{2}$ volte, cioè, per la $\Sigma h^{(i)} = r + 1$, infinita $\Sigma h^{(i)} h^{(j)} - 1$ volte ($i \neq j$ e $i, j = 1, 2, \ldots \sigma$). Onde *proprietà caratteristica di una V^n_{r-1} avente con altre superficie le medesime prime polari è che rispetto ad essa siano apolari le $\infty^{\Sigma h^{(i)} h^{(j)} - 1}$ quadriche inviluppi passanti per σ stelle d'iperpiani di sostegni $S_{r-h'}$, ... $S_{r-h^{(\sigma)}}$ tali che* $\Sigma h^{(i)} = r + 1$. Tutte le V^n_{r-1}

soddisfacenti a questa condizione sono $\infty^{\mu+\sigma-1}$ e si distribuiscono in ∞^{μ} sistemi $\mathcal{A}$. Se $h' = h'' = \cdots = h^{(\sigma)} = 1$ (e solo allora) $\mu = 0$ e si ha un solo sistema $\mathcal{A}$.

Se gli spazî fondamentali sono S_0, S_{n-1}, le quadriche ora dette sono ∞^{n-1} e costituite dal punto S_0 e da un punto variabile di S_{n-1}.

14. L'osservazione del n. 9 si estende nel caso che gli spazî fondamentali $S_{h'-1}, \ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$ non sieno tutti punti. Si ha cioè, osservando che per ciascuno degli ∞^{μ} sistemi $\mathcal{A}$ che competono a quegli spazî, le omografie dette nel n. 9 sono sempre le medesime, che *ogni omografia con dati spazî fondamentali è omografia dei poli di una* V^n_{r-1} *generica della* $\infty^{\mu+\sigma-1}$ *sopra definita e di un' altra* V^n_{r-1} (*che con quella fa parte di un sistema* $\mathcal{A}$).

15. Considerazioni al limite e i casi particolari per $r = 1, 2, 3$ inducono a pensare che le principali delle precedenti proprietà si conservino quando si passi dalle omografie generali alle particolari, cioè s'imagini che gli spazî fondamentali s'avvicinino indefinitamente fra loro in vario modo, onde si ottengano quelli che Predella chiamò *spazî multipli* (¹). In questi casi limiti manca tuttavia la determinazione di un sistema $\mathcal{A}$ quale fu esposta nei n. 7, 8.

16. A meglio precisare il metodo da seguire nei casi particolari e anche a conferma delle deduzioni del n. 13, sarà utile aggiungere alcune osservazioni analitiche.

Le formole

$$(2)\qquad y_i = \sum_k a_{ik}\, z_k \quad (i = 1, 2, \ldots r+1)$$

rappresentivo una *determinata* (non degenere) delle omografie con dati spazî fondamentali $S_{h'-1}, \ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$. Se $\varphi = 0$ è una *qualsiasi* delle $\infty^{\mu+\sigma-1}$ V^n_{r-1} relative a quegli spazî esisterà (n. 14) un'altra V^n_{r-1} (che con quella entra in un sistema $\mathcal{A}$), di equazione $f = 0$, così che si abbia identicamente

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k a_{ki} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \ldots r+1).$$

Ne segue

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \sum_k a_{ki} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial x_j};$$

donde, scambiando i con j e sottraendo,

$$(5)\qquad 0 = \sum_k a_{ki} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial x_j} - \sum_k a_{kj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial x_j} \quad \begin{pmatrix} i \neq j \\ i, j = 1, 2, \ldots r+1 \end{pmatrix}.$$

(¹) L. c., § 5, (14).

Queste condizioni [1] sono adunque *necessarie*. Ma esse sono anche *sufficienti* affinchè una $\varphi = 0$ abbia le stesse prime polari di una $f = 0$, essendo (2) la relazione omografica fra i poli; cioè insomma affinchè una $\varphi = 0$ sia della detta $\infty^{\mu+\sigma-1}$. Infatti, ponendo simbolicamente $\varphi = \beta_x{}^n$, dalle (5) si hanno le

$$(6) \qquad \sum_k a_{kt_1} \beta_k \beta_{t_2} \beta_{t_3} \dots \beta_{t_n} = \sum_k a_{kt_2} \beta_k \beta_{t_1} \beta_{t_3} \dots \beta_{t_n}$$

essendo $t_1 t_2 \dots t_n$ una qualunque disposizione dei numeri $1, 2, \dots r+1$. Si può quindi sempre determinare una funzione $f = b_x{}^n$ soddisfacente alle (3), perchè deve aversi

$$\begin{aligned} b_{t_1} b_{t_2} \dots b_{t_n} &= \sum_k a_{kt_1} \beta_k \beta_{t_2} \beta_{t_3} \dots \beta_{t_n} \\ &= \sum_k a_{kt_2} \beta_k \beta_{t_1} \beta_{t_3} \dots \beta_{t_n} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

i cui secondi membri, per le (6), sono eguali. Si ritorna poi alle (2) per il teorema di Eulero. È facile del resto verificare che la f così ottenuta soddisfa alle (5). Infatti dalle (4) si ha

$$\sum_j a_{js} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} = \sum_{jk} a_{js} a_{ki} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial x_j}$$

e parimenti

$$\sum_j a_{ji} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_s} = \sum_{jk} a_{ji} a_{ks} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial x_j}:$$

dalle quali, sottraendo (per avere j, k lo stesso significato e quindi essere scambiabili), si hanno per la f appunto relazioni della forma (5).

Concludiamo che l'equazione della $V^n{}_{r-1}$ variabile nell'$\infty^{\mu+\sigma-1}$ relativa a dati spazî fondamentali $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$, si calcola partendo da una omografia (1) con questi spazî fondamentali, generica ma determinata (i rapporti delle a_{ik} cioè essendo *dati*) e soddisfacendo alle (5). Nella φ che si otterrà debbono restar liberi linearmente $\mu + \sigma - 1$ coefficienti.

[1] Ne discendono $\binom{r+1}{2}\binom{n-2+r}{r}$ relazioni omogenee lineari fra le $(r+1)^2-1$ quantità $a_{ii} - a_{jj}, a_{ij}, a_{ji}, \dots$ (contando cioè delle $a_{ii} - a_{jj}$ soltanto quelle linearmente indipendenti). Il primo numero è inferiore al secondo solamente quando $n = 2$ ed r qualunque, ovvero $n = 3$ ed $r = 1$. Ciò porta a ritenere che, esclusi questi casi, le $V^n{}_{r-1}$ che hanno con altre le medesime prime polari sono *particolari*, come si trova effettivamente per $r = 1, 2, 3$.

Notisi che le condizioni (5) dicono che alle φ sono apolari le quadriche inviluppi

$$\sum_k a_{ki}\,\xi_k\,\xi_j - \sum_k a_{kj}\,\xi_k\,\xi_i = 0 \tag{7}$$

indicando colle ξ coordinate di iperpiani. Che queste quadriche passino per gli spazî conjugati ai detti spazî fondamentali (n. 13), risulta subito dall'osservare che i piani uniti dell'omografia soddisfano ad equazioni della forma

$$\sum_k a_{ki}\,\xi_k - \varrho\xi_i = 0\,,$$

ovvero

$$\sum_k a_{ki}\,\xi_k\,\xi_j - \varrho\xi_i\,\xi_j = 0$$

donde, scambiando i con j e sottraendo, si ottengono precisamente le (7). Moltiplicando ordinatamente queste equazioni (7) per parametri variabili e sommando si ha il sistema delle quadriche apolari alle $\varphi = 0$.

Presa poi una *determinata* $\varphi = 0$ (nella quale adunque sieno costanti, oltre le a_{ik}, i suddetti $\mu + \sigma - 1$ coefficienti), si ha il sistema A di cui essa fa parte, applicando una trasformazione (2) $y_i = \sum_k a'_{ik}\,z_k$. La trasformata di $\varphi = 0$, variando le a'_{ik}, dà tutte le V^n_{r-1} di A.

Astronomia. — *Il pianeta DQ 1898 (433).* [1]. Nota del Corrispondente E. Millosevich.

L'orbita del pianeta DQ 1898 (433) ha destato, e ben giustamente, il più vivo interesse non solo nel mondo degli astronomi, ma presso tutti gli studiosi di filosofia naturale.

Il pianeta, anzichè giacere fra Marte e Giove, ha un'orbita, che ci obbliga a chiamarlo « pianeta intramarziale » e che lo colloca quale primo dei pianeti esteriori, così che l'ordine diventa il seguente: Mercurio, Venere, Terra, DQ 1898, Marte ecc. ecc.

L'astro è stato trovato sulla lastra fotografica lo stesso giorno 13 agosto da G. Witt a Berlino e da Charlois a Nizza; la priorità della scoperta spetta al primo.

Uno straordinario moto retrogrado accusava un'orbita eccezionale, sulla natura della quale potevasi congetturare, ma la realtà superò qualunque

[1] La numerazione, assegnata dal R. I. di Berlino, è impropria; il pianeta deve portare un nome proprio e nessun numero.

congettura, e primo, il dott. A. Berberich, celeberrimo calcolatore di Berlino, sul breve intervallo 14-31 agosto, avendo calcolato un primo saggio di elementi ellittici, rivelò, nel n°. 3517 delle *Astronomische Nachrichten*, che il moto medio diurno del pianeta era 124″ più forte del moto medio di Marte, il periodo rivolutivo scendendo a 645 dì, mentre quello di Marte è di 687. Il rapporto fra il semiasse maggiore e la distanza del centro dal foco dell' ellisse gli risultò di 0,229, così che, il semiasse maggiore essendo 1.461, la distanza perielia diveniva 1.126, mentre l' afelia saliva a 1.796; ma la distanza media di Marte è 1.524 e la afelia 1.666, d'onde il pianeta percorre un' orbita intrecciata con quella di Marte, una porzione giacendo, nella parte afelia, al di là dell' orbita di questo, mentre poi il moto medio, e quindi il periodo rivolutivo, lo classifica come primo dei pianeti esteriori.

Dopo il fatto straordinario rilevato da Berberich il pianeta venne assiduamente osservato, poichè gli elementi dovevano essere ritenuti come di prima approssimazione.

Io osservai il pianeta più volte fino all' otto ottobre, e mi occupai del calcolo dell' orbita usando intervalli maggiori. Presento all'Accademia due sistemi di elementi, il primo, basato sull' intervallo 14 agosto - 21 settembre, che già deve ritenersi migliore di quello conosciuto, il secondo sull' intervallo 14 agosto - 24 ottobre, mercè l' amabilità del chiarissimo astronomo dott. Vincenzo Cerulli, il quale, col grande suo equatoriale di Teramo, avendo avuta l' abilità di osservare l' astro, mentre lumeggiava la luna, volle favorirmi una rigorosa posizione del medesimo, che dalla prima messa in conto è separata da 71 giorni. Gli elementi calcolati da Berberich e i miei due sistemi sono contenuti nella seguente tabella.

	Berberich	Millosevich$_1$	Millosevich$_2$
T	1898 Agosto 31,5 Berlino	id.	id.
M	220°14′ 3″7	222°23′28″7	222°16′27″1
φ	13 13 3 8	12 49 5 4	12 52 48 3
μ	2010″ 131	2015″ 119	2012″ 2186
log a	0,164521	0,163804	0,164221
π	122°17′19″2	120°34′27″9	120°41′20″9
☊	303 48 53 0	303 24 53 1	303 27 48 3
i	11 6 57 1	10 45 18 1	10 48 33 5
$M+\pi$	342 31 22 9	342 57 56 6	342 57 48 0

Per il calcolo della grandezza (splendore) si ha:

$$M = 10.5 + 5 \; (\log. \Delta + \log. r).$$

L' orbita n. 1 è derivata dai seguenti elementi:

	T	α(1898.0)	δ(1898.0)
Agosto	14,5 B	321°37'25"5	6°24'23"2 S
»	31,5 B	314 16 25 1	6 18 2 9 S
Sett.	21,368357 B	309 16 12 15	6 21 15 7 S

Il primo e il secondo sono due luoghi normali, il terzo è una mia osservazione.

La seconda orbita deriva dai luoghi primo e terzo della prima coll' aggiunta della seguente osservazione del dott. Cerulli.

1898 ottobre 24 $7^h 42^m 48^s$ t. m. Teramo.

$\Delta\alpha = + 1^m 15^s 72$ (20); $\Delta\delta + 3' 57'' 1$ (4)

⁎ Bauschinger 10935 $20^h 47^m 57^s 26$; — $5° 32' 42'' 1$ (1898. 0)

α apparente (433) $20^h 49^m 16^s 62$ (9. 095); δ apparente (433) — $5° 28' 26'' 6$

Se colla *prima* orbita si calcola il luogo del pianeta si trovano le seguenti differenze

$$(O - C); - 6^s 73; \; - 7'' 7$$

La mia prima orbita adunque conduceva, dopo 33 dì di abbandono, all' errore di $1' 41'' 2$ sul cerchio massimo, differenza fra il punto calcolato e il punto reale. Detta orbita poteva perciò servire assai bene come ausiliaria per rapidamente calcolare la seconda.

Non è necessario soggiungere che il fatto straordinario, rivelato dal primo saggio d' orbita di Berberich, è pienamente assodato, e messo perciò fuori di questione.

Anche il mio secondo sistema subirà correzioni in base alle osservazioni, che ancora si potranno fare, per un paio di mesi, usando grandi equatoriali, ma credo che saranno piccole, e μ verrà fissato intorno a 2012 o 2013″; φ intorno a $12° 55' \pm$ e così dicasi degli altri elementi.

Durante le osservazioni, l' astro, scoperto quando era di $10\frac{1}{2}$, discese fino a 12, e così è attualmente; l' afelio essendo a circa 301° e la longitudine vera sull' orbita essendo il 13 agosto circa 317°, il pianeta venne trovato nelle condizioni le più sfavorevoli di luce, ed è strano che sia sfuggito nel passato, quando venne in opposizioni favorevoli; vero è che le opposizioni si succedono ad intervalli larghi, dacchè la durata della rivoluzione sinodica media è 844 giorni, e può essere assai allargata, come anche diminuita, in causa della forte eccentricità.

La figura 1 qui appresso dà un' idea della postura dell' orbita del pianeta in relazione colle orbite della Terra e di Marte, che, per semplicità, sono

disegnate con cerchi concentrici, mentre l' orbita del DQ 1898 è ellittica nella giusta misura.

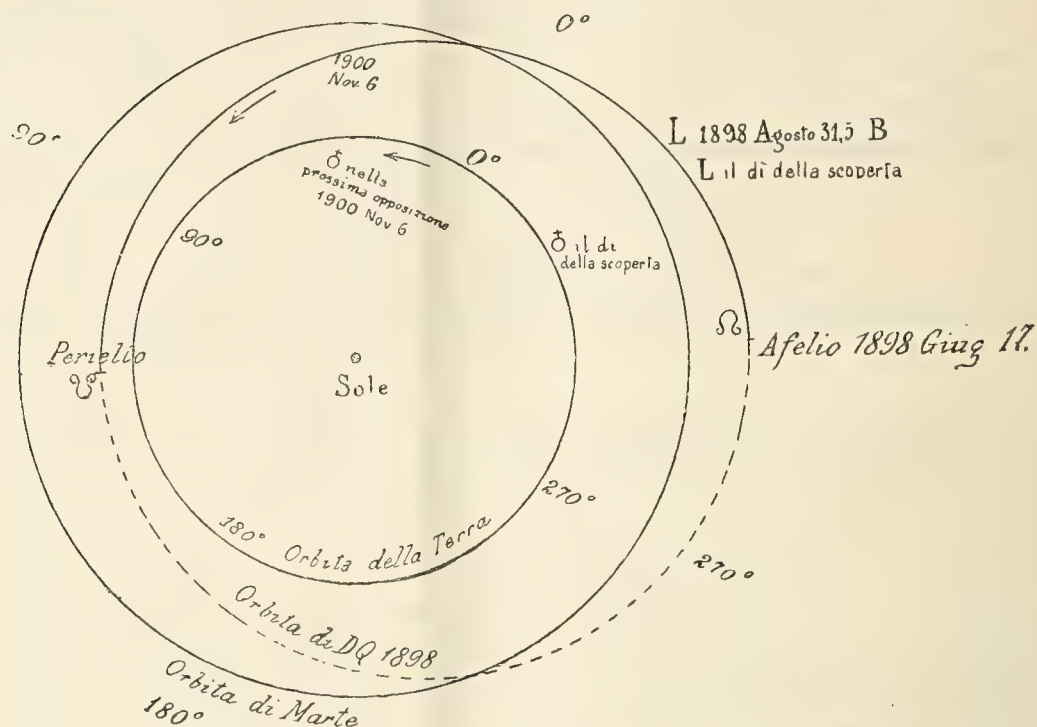
La parte punteggiata deve considerarsi sotto il piano dell' orbita terrestre ($i = 11°$). Si scorge immediatamente che le linee nodali e dell' asse maggiore quasi coincidono ($\pi = 121°$; ☋ $= 123°$).

$\pi = 121°$ ☊ $= 303$ ☋ $= 123$ $i = 11$ $\varphi = 13$ 1898 Agosto 31,5 B L $= 343$

Fig. 1.

Per raggiungere il minimo dei minimi nella distanza dalla terra debbono essere soddisfatte (ove sia possibile) quattro condizioni, il pianeta deve essere in opposizione, cadere sulla linea dei nodi, essere perielio e la terra essere afelia, cioè deve avvenire la così detta opposizione perielia nodale estiva.

Fatta per il momento l' ipotesi che le quattro condizioni veramente potessero verificarsi, si avrebbe (col mio secondo sistema di elementi) $a = 1.460$ $a - a\varphi = 1.135$ e quindi in opposizione nodale perielia colla terra afelia si avrebbe $\Delta = 0.118$ e la parallasse orizzontale equatoriale salirebbe a circa 74″. Il nodo discendente essendo 123° e il perielio 121°, l' opposizione nodale perielia è all' incirca soddisfatta, ma, per essere $\pi = 121°$, la longitudine eliocentrica della terra soddisfa a questa condizione il 21 gennaio circa, e la forte eccentricità assicura, fra relativi stretti limiti, la stabilità della linea apsidale, così che è impossibile la quarta condizione, del resto

non molto importante, per essere l' orbita della terra poco eccentrica. La minima distanza quindi che può in realtà aver luogo è circa 0,152, in tal caso la parallasse orizzontale sale a $\frac{8''8}{0,152} = 58''$ circa. Di fronte a questo magnifico numero impallidiscono i classici metodi di osservazione fin qui usati, e le opposizioni di Marte, quelle dei pianetini interjoviali più prossimi e i celebri passaggi di Venere diventano metodi storici, che fecero il loro tempo, e seppero assicurare la parallasse del sole intorno a uno o due centesimi di secondo dopo inaudite fatiche e profonde discussioni.

Presentemente non si possono calcolare con esattezza le condizioni e il tempo nel quale il pianeta si troverà nell' avvenire lungo la sua orbita, e perchè gli elementi debbono ancora essere migliorati, e perchè le perturbazioni per opera di Giove, di Marte e della Terra debbono essere messe in conto, anzi quest' ultime possono divenire notabili e ben superiori a quelle inflitte da Marte, anche se l' orbita del pianeta è intrecciata coll' orbita di quello, poichè la minima distanza da Marte sarà sempre maggiore della minima distanza dalla terra in causa dell' angolo fra i due piani e della postura dei nodi $\begin{pmatrix} \Omega \text{ Marte } 49^\circ \\ \Omega \text{ DQ } 1898 \ 303 \end{pmatrix}$.

Tuttavia qualche conteggio approssimato fin d' ora può essere fatto, nè essere smentito nell' avvenire almeno nelle linee generali.

Il periodo rivolutivo, in base ai miei ultimi elementi, è

giorni 644.066

Il pianeta fu all' afelio verso il 17 giugno 1898 e sarà al perielio verso il 5 maggio 1899. La relazione

5 maggio 1899 + n. 644.066

dà le successive epoche dei passaggi al perielio. Tre periodi rivolutivi corrispondono a giorni 1932 circa, e però un passaggio al perielio ebbe luogo verso il 19 gennaio 1894, nel qual tempo il pianeta era prossimo all' opposizione in longitudine. Ed in verità, la durata media della rivoluzione sinodica essendo di giorni 843.77, l' antepenultima opposizione sarebbe accaduto il 31 dicembre 1893, calcolando in base al periodo medio or ora nominato; senonchè questa forma di conto, per i pianeti di forte eccentricità orbitale, conduce spesso a gravissimi errori; in base ai miei elementi N. 2, per 31, 5 dicembre 1893, si avrebbe $M =$ circa 350°, d' onde $v = 344^\circ$, e la longitudine eliocentrica del pianeta circa 105°, d' onde l' opposizione in longitudine si è verificata verso il 10 gennaio 1894, ma il passaggio al perielio si calcolò or ora verso il 19 gennaio 1894, e però l' astro trovavasi perielio, perigeo e nodale, lo splendore di esso sarà stato da 6^{ta} a 7^{ma} grandezza, la distanza un « minimum minimorum », ma la scienza ignorava allora l' esistenza di esso.

Per le eventuali ricerche fotografiche ho calcolato:

	α	δ	λ	β	log. r	log. Δ
1894 gennaio 10,5	$9^h 6^m$	+ 30°,5	130°, 0	+ 13°,3	0,055	9,214
1894 gennaio 11,5	9 5	+ 29, 4	130, 13	+ 12, 2	0,055	9,210

Non vi è bisogno di dire che l' incertezza di questi valori è grande, e perchè gli elementi attuali debbono subire correzioni, e perchè le perturbazioni altereranno fortemente quelli; ma, entro i limiti delle lastre fotografiche che si usano in dette ricerche, possono reggere.

Rapido, come si scorge, è il moto verso sud, di più di un grado in 24 ore, normale e retrogrado il moto in α, invece piccolissimo e *diretto* il moto

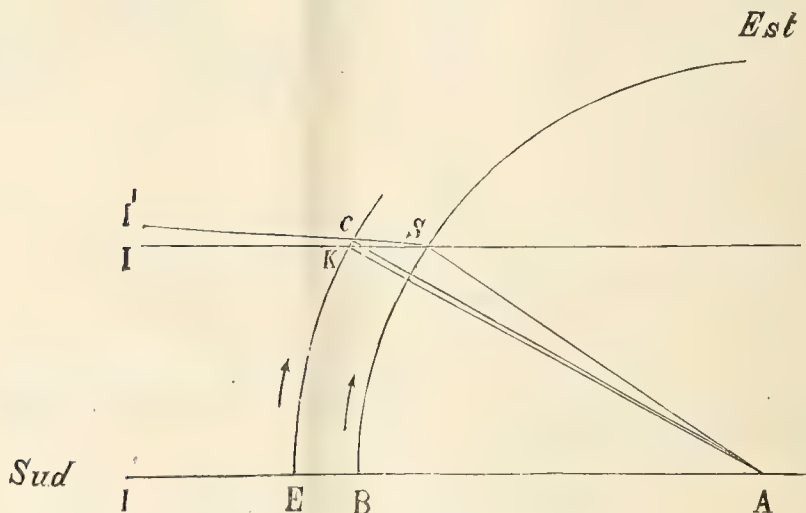



Fig. 2.

in λ. Quest' ultimo fatto è unico affatto per i pianeti che possono essere in opposizione (esteriori). È un altro punto di interesse, che presenta il pianeta. La figura giustifica la cosa (fig. 2).

A è il sole; SAB è l' angolo eliocentrico della terra (10 gennaio = 61′); CAE idem del DQ 1898 (variazione in longitudine eliocentrica in 24 ore = 53′); AB (terra circa al perielio) = 0,98; AE = 1,14. Sia la terra in B, e il pianeta in E in opposizione in longitudine, perielia e nodale. Da B il pianeta è projettato in I. Il giorno dopo, benchè CAE<SAE, per essere CE>BS, la terra, che è in S, projetta il pianeta in I′ l' angolo I′SI = + 0°,13, rappresenta il moto diretto in longitudine. Che CE sia maggiore di BS è evidente, perchè, calcolando coi numeri soprascritti, il rapporto $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{SB}}$ risulta

1,0107. Tale fatto dipende dalla grande vicinanza dell' astro e dell' eccentricità dell' orbita, e si verifica soltanto per breve momento quando l' astro è al minimum minimorum delle distanze. Il calcolo del rapporto $\frac{CE}{SB}$ è fatto sostituendo, come in questo caso è lecito, ai piccoli archetti di ellissi, i corrispondenti archetti di circolo di raggio dato; si ha allora $\frac{1.14 \times 53}{0.98 \times 61} > 1$.

Si può presentare la cosa variando un poco la forma. La velocità della terra alla media distanza dal sole, cioè lo spazio percorso nell' unità di tempo (il giorno medio) è 3548″ sen 1″. Assumendo per unità di velocità codesto valore, la velocità della terra il 10 gennaio è:

$$\frac{3667 \times 0.9835}{3548} = 1.016 \qquad \text{(A}$$

La velocità di DQ 1898 alla sua media distanza, espressa nell' assunta unità, è:

$$\frac{2012 \times 1.4596}{3548} = 0.828 \text{ (sull'orbita).}$$

La velocità di DQ 1898, verso il 10 gennaio 1894, fu:

$$\frac{3180 \times 1.14}{3548} = 1.027 \text{ (sull'eclittica)} \qquad \text{(B}$$

d' onde $\frac{B}{A} > 1$. Del resto i due conteggi sono gli stessi presentati sotto forma diversa.

Passando a calcoli utili per il futuro, le opposizioni *medie* in longitudine avvengono all' incirca ai tempi seguenti:

$$1898 \text{ Agosto } 14{,}5 \text{ B} + n \times 843^{d}{,}77$$

e poichè tre rivoluzioni sinodiche medie equivalgono a quasi sette anni giuliani, tre opposizioni dopo quella del 10 gennaio 1894, cioè la prossima parrebbe favorevolissima per il problema della parallasse solare, ma l' opposizione vera anticipa di molto sulla media.

Ed in verità questa accadrebbe verso il 6 dicembre 1900, mentre quella avrà luogo verso il 6 novembre con $v =$ circa 284° e la distanza dalla terra sarà 0.4 con parallasse 22″ — 23″. In ogni modo la prossima opposizione permetterà la determinazione della parallasse con precisione comparabile ai più squisiti metodi odierni d' osservazione.

Trascorsa la prossima opposizione dovrà scorrere molto tempo perchè si realizzino le condizioni perielio-perigeo. Ed in verità 10 rivoluzioni sinodiche medie fanno giorni 8437,7 e 23 anni giuliani circa giorni 8401, e però una

opposizione favorevole è quella del 1917. Ma l' opposizione vera, ritardando molto sulla media, la rende comparabile nei risultati a quella del 1900, 6 novembre. Finalmente 30 anni giuliani fanno giorni 10957 circa, e 13 rivoluzioni medie sinodiche corrispondono a giorni 10969, e però nel 1924 pare doversi verificare un' opposizione perielia, come avvenne nel 1894.

Il 13 gennaio 1924 si verificherebbe l' opposizione media in longitudine.

Pel 1924 gennaio 13 0^h B si ha:

$$M = 0^\circ 40'$$
$$v = 1 \quad 5 \text{ circa}$$
$$l = 122^\circ$$
$$\odot = 293^\circ$$

da cui si deduce che l' opposizione vera in longitudine avrà luogo verso il 3 febbraio 1924. Neppure adunque il 1924 si trova nelle condizioni di beneficio eccezionale del 1894, ma senza dubbio è l' opposizione prossima la più vantaggiosa.

Conchiudendo, le opposizioni future del pianeta DQ 1898 da utilizzare per la determinazione della parallasse sono: in prima linea quella del 1924, e poi quelle del 1900 e del 1917. Certamente nel futuro si presenteranno opposizioni anche più vantaggiose di quella del 1924, ma l' occasione mancata del 1894 è un caso doloroso per la scienza.

Zoologia medica. — *La malaria propagata per mezzo di peculiari insetti.* — II Nota preliminare del Socio B. Grassi.

Trovo necessario di riferire alcune notizie storiche. Veramente si suol tralasciarle nelle note preliminari, ma nel caso attuale mi sembra che occorra fare un' eccezione alla regola.

Laveran, Manson, Bignami, Dionisi, Ross e Koch cercarono di rendere verosimile che i *mosquitos* o, come di solito diciamo noi italiani le *zanzare*, avessero un intimo rapporto colla malaria.

Questo intimo rapporto venne però concepito dai varî autori in modo enormemente differente.

Laveran un tempo sospettò i rapporti tra le zanzare e la malaria: però negli ultimi tempi si limitò ad ammettere l' infezione malarica per l' aria e per l' acqua, supponendo sempre però che il parassita vivesse anche in qualche specie di animali inferiori, o di vegetali.

Manson suppose che il parassita malarico fosse normale dei *mosquitos*, o di qualche altro insetto succhiatore e che l' infezione umana rappresentasse soltanto un episodio nella storia del parassita. Precisamente colla morte del

mosquito, i parassiti diventerebbero liberi e potrebbero entrare nel nostro corpo, o per inalazione, o per mezzo dell' acqua potabile.

Bignami rese verosimile l' *ipotesi* (1) *che le febbri malariche si prendano per inoculazione.* Egli si giovò della collaborazione del Dionisi, il quale estese l' ipotesi anche agli uccelli, confortandola di nuovi dati sperimentali. Essi supposero che il germe malarico presente nel suolo delle località malariche venisse inoculato nell' uomo dalle zanzare, o da specie affini da insetti, che depositano le loro uova nell'acqua, o in luoghi umidi.

Koch (1898), avendo confermato le ricerche degli Americani sui rapporti tra la zecca e la febbre del Texas, *suppose* che i *mosquitos* si comportassero nella malaria come le zecche nella febbre del Texas, la quale è prodotta da parassiti affini a quelli malarici dell' uomo. Perciò il *mosquito* riceverebbe il parassita succhiando sangue d' individuo malarico, lo trasmetterebbe alle uova e quindi ai figli, dai quali tornerebbe colla puntura nell' uomo.

Nella riunione della *British medical Association* del corrente anno tenutasi ad Edimburgo dal 26 al 29 luglio, riunione i cui *proceedings*, portando la data del 24 settembre 1898, pervennero a Roma alla fine di settembre, Manson fece un'altra interessante comunicazione sulla malaria dell'uomo.

Dapprima riferì le osservazioni di Ross sulle emamebe degli uccelli, dalle quali risulta che esse si moltiplicano in un *grey mosquito.*

Dando forma zoologica alle ricerche di Ross si potrebbe dire che un'emameba degli uccelli appartiene al ciclo evolutivo di uno sporozoo parassita di un *mosquito*, che, giudicando dalla descrizione che si legge nella Memoria del Ross, forse appartiene al gen. *Aedes* (2). Si tratta di una generazione alternante nell' uomo e nel *mosquito*: in quello ha una forma, in questo un' altra.

La generazione nel *mosquito* è occasionata dal succhiamento di sangue infetto: la generazione nell' uccello dalla puntura di *mosquito* infetto.

Quindi Ross ritiene d' aver dimostrato che il *mosquito* nato puro s' infetti succhiando sangue infetto e infetti più tardi altri uccelli. Manson, che ha grande fiducia in Ross suppone che l' uomo possa prendere la malaria in modo simile a quello indicato dal Ross per gli uccelli, ma soggiunge: *that is the only way I cannot venture to assert.*

In particolare voglio rilevare dal discorso di Manson che Ross e Manson stesso avevano intesa la necessità di precisare meglio le specie dei *mosquitos.*

Già quindici giorni prima del discorso del Manson senza aver notizia dei lavori inglesi mi ponevo allo studio della questione.

(1) Koch alcuni anni prima (1892) aveva già pensato ad una simile possibilità.

(2) Intanto che correggo le bozze, ricevo da Manson un certo numero di *grey mosquitos* inviatigli dal Ross. Io non so distinguerli dal *Culex pipiens.* Ciò è molto importante, perchè fin dal 1890 io ho portato dei fatti dimostranti che luoghi malarici per gli uccelli potevano essere sani per l'uomo.

La mia convinzione era questa: se veramente nei *mosquitos* si debbono cercare gli ospiti intermedi, soltanto alcuni di essi possono essere colpevoli perchè notoriamente vi sono paesi pieni zeppi di *mosquitos*, e non infetti di malaria, e le stagioni dei *mosquitos* non coincidono sempre bene con quelle della malaria. Mi proponevo perciò, procedendo colle comparazioni, cioè per via d'esclusione, di determinare quali forme dovessero ritenersi sospette.

Occorre aggiungere che la parola *mosquito* è una denominazione volgare che abbraccia diversi e in parte molti disparati generi di insetti (*Culex, Anopheles*, *Aedes*, *Ceratopogon*, *Simulia*, *Phlebotomus*).

Le specie sommate assieme superano di molto il centinaio.

Perciò il mio lavoro non era lieve, ma il profitto che ne attendevo doveva compensare le fatiche, perchè m' avrebbe indicato con quali animali si dovessero fare gli sperimenti: senza questa determinazione, l'esito degli sperimenti era troppo affidato al caso e avrebbe potuto riuscire negativo per anni intieri.

I risultati delle mie ricerche furono da me comunicati all' Accademia il 29 settembre. La Nota pubblicata nei Rendiconti fu riprodotta ai primi d' ottobre nel Policlinico con poche aggiunte suggeritemi da nuovi fatti.

Brevemente posso riassumerla come segue:

1° i *Ceratopogon*, le *Simulia*, gli *Aedes* e i *Phlebotomus*, sono per lo meno non necessari per l' infezione malarica;

2° certe specie di zanzare, tra cui il comunissimo *Culex pipiens*, debbonsi ritenere innocue:

3° certe altre specie sono per lo meno non necessarie: *Culex Richiardii*, *Culex annulatus*, *Culex hortensis*, *Anopheles bifurcatus*, *Anopheles nigripes*, *Culex spathipalpis*, *Culex pulchritarsis*;

4° certe specie sono enormemente sospette: esse sono le seguenti:

Anopheles claviger Fabr.;
Culex penicillaris;
Culex malariae.

Il mio inserviente, che s' infettò di malaria, è stato punto soltanto da queste tre specie nel mese precedente all' infezione.

Fui così condotto alla conclusione che le prime due, per lo meno la seconda, fors' anche la terza, vengono a fungere ordinariamente da ospiti alternanti dei parassiti malarici dell' uomo.

Espressi perciò la mia convinzione che la infezione malarica fosse dovuta esclusivamente a peculiari specie di culicidi. Essi trovano le condizioni di svilupparsi soltanto nei luoghi palustri e fungono da osti, o intermedi, o definitivi. La mia convinzione era basata:

1° su imponentissime analogie tra la malaria e la febbre del Texas propagata dalle zecche;

2° sopra una serie di osservazioni e di esperimenti da me fatti contemporaneamente alle suddette ricerche zoologiche.

Sia le osservazioni che gli sperimenti non erano decisivi, ma imponevano molto a me, che da molti anni ho dimostrato che una pulce è oste intermedio d' una filaria, le cui larve si trovano nel sangue del cane, difendendo così le osservazioni di Manson sulle filarie del sangue dell' uomo contro gli attacchi del grande elmintologo Leuckart.

Però io non potevo pretendere che il pubblico medico entrasse subito nel mio ordine d' idee. Se ciò nonostante mi decisi a pubblicare la Nota del 29 settembre, si fu perchè credevo che tutti avrebbero riconosciuto che per giungere alla meta occorreva cambiar strada, sperimentare con peculiari forme, non a caso.

Come tutti sanno, Koch venne a Roma nell' estate e notoriamente si occupò anche dei *mosquitos*. Che cosa concludesse nessuno lo sa, perchè egli finora non ha pubblicato nulla nè indirettamente nè direttamente, per quanto consta a me ed ai miei amici, e certe indiscrezioni fornite da giornali politici si debbono ritenere non attendibili.

Fortunatamente prima che egli partisse era già iniziato l'*experimentum crucis* per le mie conclusioni.

Bignami aveva tentato anche quest' anno di infettare di malaria individui sani in luogo non malarico, facendoli pungere dalle zanzare. L' esperimento era stato fatto e ripetuto, ma sempre con risultato negativo. Si era adoperato però il *Culex pipiens* e fors' anche il *Culex hortensis*.

Io avevo tentato lo stesso sperimento a Rovellasca coll' *Anopheles claviger*, ma non era riuscito, perchè gli *Anopheles* in Lombardia nel settembre in generale non pungevano più.

Tornato a Roma, proposi a Bignami di riprendere il di lui esperimento coi culicidi palustri, che io stesso gli facevo raccogliere.

Egli accettò e con un esperimento, dirò così, pubblico, venne messa alla prova la sua ipotesi e la mia conclusione (1)

Bignami aveva preparato l' esperimento in modo inappuntabile e la conclusione è indiscutibile, come risulterà dalla relazione che egli sta pubblicando (2).

(1) Di questo esperimento è stato dato notizia a varî giornali politici.

(2) Ciò non toglie che qualcuno la discuta. L' individuo infettato di malaria colle punture delle zanzare palustri fino a circa 50 giorni prima della manifestazione della febbre era stato punto dai *Culex pipiens*. Perchè non potrebbe esser proveniente da essi l' infezione verificatasi?

Rispondo che ciò non può essere sia per la lunga durata del periodo d' incubazione, sia perchè l'accogliere una simile possibilità equivarrebbe all'ammettere che la malaria è propagabile dovunque si propagano i *Culex pipiens*, il che in realtà non si verifica.

Altri osserva: ci volle troppo tempo e troppe punture per ottenere il desiderato effetto. Rispondo che il caso verificatosi nel paziente di Bignami trova perfetto riscontro

Senza la malaria, con la puntura dei culicidi palustri, in un luogo non malarico, si ottenne lo sviluppo delle febbri malariche (infezione estivo-autunnale), in un uomo mai stato affetto di malaria.

I culicidi adoperati furono le tre specie molto sospette che ho di sopra nominate. Non si può però escludere che siansi insinuati alcuni *Culex annulatus* e alcuni *Anopheles bifurcatus*, ma la loro rarità in quei punti del territorio di Maccarese, donde provenivano i culicidi per l'esperimento, è tale da renderli certamente non sospetti (¹).

Importante a notare si è il fatto che l'individuo suddetto, nei mesi precedenti, era stato fatto pungere moltissimo dal *Culex pipiens*, ma sempre invano.

Sorge ora la domanda se tutte e tre le specie sieno colpevoli, o due, o una sola? Io sospetto e dirò anzi cha ritengo accertato che il *Culex penicillaris* propaga le febbri malariche, non posso però affatto negare che le altre due forme facciano altrettanto.

Nell' esperimento sopraccennato però si può quasi certamente escludere l'influenza dell' *Anopheles claviger*, di cui si usufruirono pochissimi esemplari, dei quali forse nessuno punse.

Aggiungerò che mentre si compiva l'esperimento suddetto, esplorai altre località. Io ritengo di poter ammettere con sicurezza che nelle paludi tra Ravenna e Cervia manca il *Culex malariae*: io non ve l'ho trovato, come non ve lo aveva trovato a suo tempo Ficalbi.

Nelle paludi pontine incontrai le tre specie, però il *Culex malariae* era meno comune.

A Sibari ebbi un reperto uguale a quello di Maccarese. Nei paesi malarici della Sicilia finora non ho trovato il *Culex malariae*, ma soltanto le altre due specie sospette e il *Culex Richiardii* (abbondante a Lentini).

Ma il viaggio da me fatto è riuscito istruttivo sotto un altro aspetto.

I culicidi malarici hanno bisogno per svilupparsi di acqua superficiale, cioè non coperta, non putrida ma quasi morta. In tutti i punti malarici si verificano queste condizioni? Nel mese di ottobre si sarebbe potuto dare una

---

in molti altri da me tenuti presenti durante il tempo che richiese l'esperimento, colla sola differenza che il paziente di Bignami soggiornò in luogo non malarico e gli altri in luogo malarico.

Altri osserva: nella camera in cui si fece l'esperimento si trovavano molte zanzare morte, disseccate e più o meno polverizzate: perchè non potrebbero i germi malarici sviluppatisi dentro le zanzare, essersi sollevati nell'aria ed aver propagato la malaria per proprio conto, indipendentemente dalle punture? A parte l'inverosimiglianza di una simile obbiezione, sta il fatto che a Rovellasca parecchi individui ebbero occasione di dormire per molti giorni in ambiente dove si trovavano molte zanzare morte e polverizzatesi, senza che in alcuno di essi sviluppasse la malaria.

(¹) In questi punti non abbiamo mai trovato alcun *Culex pipiens*.

risposta negativa a questa domanda, ma forse tornando sui luoghi d'estate, la risposta potrà essere ben differente poichè *dove c'è malaria, ho sempre trovato zanzare malariche.* L'acqua superficiale perciò, per quanto scarsa in certi luoghi e in certe epoche, deve essere sufficiente per lo sviluppo delle zanzare malariche.

Riunendo assieme le ricerche sopra riferite a quelle di Ross sugli uccelli si può ritenere dimostrato che i parassiti malarici alternativamente vivano e si riproducano sotto forme differenti negli uomini e in peculiari culicidî. Gli uomini malarici infettano peculiari zanzare, le quali alla loro volta infettano gli uomini non malarici. Se ciò accada direttamente, ovvero trasmettendo i germi alla prole, come nel caso d'una zecca dei bovini, resta ancora *sub iudice* ([1]).

Per infettarci le zanzare malariche devono essere infette. La maggior parte di esse non lo sono certamente.

Tutto quello che sappiamo sui cicli evolutivi dei parassiti animali ci impone di sostenere che le zanzare palustri sono l'unica via di trasmissione della malaria.

Contro questa conclusione si portano però i seguenti fatti:

1° casi di malaria sviluppatisi in enorme numero dopo un acquazzone;

2° casi di malaria sviluppatisi per movimento di terreno;

3° casi di malaria sviluppatisi in luoghi senza zanzare malariche;

4° casi di malaria sviluppatisi in luoghi disabitati da tempo immemorabile.

Quanto ai primi, osservo che il bagnarsi, l'inzupparsi d'acqua può occasionare lo sviluppo, o la recidiva delle febbri malariche, ma l'intervallo che forse spesso corre (un giorno circa) tra la supposta causa e l'effetto è così breve, rispetto ai fatti già noti sul periodo d'incubazione della malaria, da farci ritenere che ci troviamo davanti, non alla vera causa, ma ad una causa occasionale, molto importante. Appunto nel mio inserviente di cui parlo più sopra, la febbre cominciò circa 24 ore dopo che era stato sorpreso in aperta campagna malarica da un acquazzone; però nelle settimane precedenti egli era stato molto punto dalle zanzare malariche. Aggiungasi che agli acquazzoni possono precedere ore e talvolta giornate, in cui le zanzare palustri ci perseguitano terribilmente.

Da parte mia conosco parecchi esempi, in cui ci fu soltanto la causa occasionale, che riuscì però sempre inefficace.

([1]) Il *Culex pipiens*, l'*Anopheles claviger* e il *Culex Richiardii* stazionano nelle nostre case: ritengo che tutti e tre prendano sangue almeno due volte a intervallo di parecchi giorni, ma ciò per ora io ho osservato direttamente soltanto sull'*Anopheles claviger*. I *Culex malariae* e *penicillaris* non vennero mai da me trovati stazionarî nelle nostre case, forse perchè si limitano ad un unico pasto di sangue.

Quanto ai secondi casi, da una parte vale talora la stessa osservazione che ho fatto per i primi riguardo al troppo corto periodo d'incubazione; d'altra parte la storia di un grande sterro tuttora in corso mi allontana dall'opinione che i movimenti di terra producano la malaria senza l'intervento delle zanzare malariche. In ogni caso occorrono in proposito estese ricerche, che anch'io curerò di fare.

Molti casi di malaria, sviluppatisi in luoghi senza zanzare malariche mi furono raccontati anche da somme autorità mediche.

Ogni qualvolta potei andare a studiarli, constatai che le zanzare malariche erano in realtà intervenute.

Infine lo sviluppo della malaria in luoghi mai stati abitati dall'uomo, fatto che si oppone da molti come una grave obbiezione, troverà probabilmente la sua spiegazione nella presenza di parassiti uguali a quelli dell'uomo in altri mammiferi. Che finora si sia cercato troppo poco, lo dimostra la recente scoperta fatta da Dionisi nei pipistrelli di parassiti, se non identici, molto affini a quelli malarici dell'uomo.

Dopo i fatti esposti, la profilassi della malaria entra in una nuova fase. Gli individui affetti di malaria sono indirettamente *pericolosi* a se stessi e agli altri. Le acque superficiali, semimorte e basse costituiscono essenzialmente l'*ambiente malarico.*

Matematica. — *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali.* Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Intorno ad alcune modificazioni delle pompe di Geissler* [1]. Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

Nel 1885 e nel 1890 [2] descrissi alcune forme di pompe di Geissler nelle quali ho cercato di ottenere una maggior semplicità di costruzione senza pregiudizio del vuoto con esse ottenibile; poscia introdussi nelle medesime altre modificazioni, sia per semplificarne ancora la costruzione, sia per renderne più comodo l'uso. In seguito, e specialmente in occasione della scoperta dei raggi Röntgen, ebbi campo di sottoporre nuovamente e ripetutamente queste pompe alla prova, e con esse ottenni con sicurezza, con facilità ed in breve tempo le rarefazioni occorrenti per la riproduzione di tutti i fenomeni.

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto fisico dell'Università di Cagliari. Settembre 1898.
(2) Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Rendiconti della Reale Acc. dei Lincei.

Le modificazioni che ho creduto utile introdurre nelle pompe di Geissler sono le seguenti:

1°. L'uso del rubinetto C, nel quale con uno strato di mercurio si rende praticamente nulla la quantità d'aria che penetra dall'esterno nella pompa, e ciò anche quando la costruzione del rubinetto non è del tutto perfetta.

2°. La soppressione del lungo tubo diritto di ferro o di vetro che sta sotto il pallone fisso delle pompe di Geissler; ciò riduce l'altezza della parte rigida della pompa da 1 metro a 20 o 30 cm., rende la pompa più comoda, meno fragile, e ne rende più facile e meno pericolosa la spedizione e quindi la riparazione in caso di rottura. Però essendo soppresso il lungo tubo suddetto, ne risulta che il tubo di gomma che unisce il pallone mobile al fisso, nella parte vicina a questo, si trova spesso ad una pressione interna di pochi centimetri di mercurio e perciò lascia sviluppare aria o gas che nuocerebbero grandemente alla rarefazione. Quindi, per evitare che questi gas penetrino nel pallone fisso, il tubo di vetro sotto di questo è ricurvo all'insù, termina all'estremità libera con un rubinetto per il quale si può espellere il gas suddetto e porta saldato lateralmente un tubo in cui s'innesta il tubo di gomma; il mercurio contenuto nella curva del tubo impedisce affatto al gas di penetrare nel pallone fisso.

3°. Ho utilizzato il vuoto che si forma nel pallone mobile, allorchè (se esso è in basso, pieno di mercurio e chiuso) lo si solleva, per mandarvi senza comprimerla l'aria aspirata dal recipiente ove si fa il vuoto, la quale così è espulsa completamente.

4°. La misura della pressione dell'aria rarefatta si fa comprimendo quella parte di essa che occupa il pallone fisso, fino ad occupare unicamente il foro del rubinetto, cioè un volume piccolo e ben determinato e misurando questa pressione senza errori di capillarità.

5°. Finalmente per economia di mercurio e per facilità di costruzione fui indotto ad usare palloni di piccola capacità (di solito di 300 cm^3 ma talvolta e senza inconvenienti di 100 cm^3 ed eccezionalmente anche di 50 cm^3). Si può credere che con palloni di maggior capacità, p. es. di 1 litro, la rapidità con cui s'ottiene una data rarefazione sia in proporzione d'essa capacità, ma non credo che ciò si verifichi in pratica; i palloni più grandi richiedono maggior tempo per riempirsi e vuotarsi di mercurio, ed a causa della grande massa di mercurio, richiedono molta cura per evitare urti pericolosi, ciò che diminuisce la rapidità dell'operazione; inoltre gl'inconvenienti nel caso di rotture crescono in proporzione della quantita di mercurio adoperata. Anzi, se si dovesse tener conto dell'energia spesa nel sollevare il mercurio, s'avrebbe che l'abbassamento e sollevamento d'un certo volume di mercurio produce minor rarefazione che non l'abbassamento e sollevamento ripetuto n volte d'un volume di mercurio n volte minore. Tuttavia non pretendo che le pompe con palloni piccoli agiscano meglio, ma solo

che gl' inconvenienti che esse presentano non sono grandi, nè sono senza compensi.

Fra le pompe che usai recentemente, la forma rappresentata nella fig. 1 è la più semplice e più facile a costruire. A è il pallone fisso, B il pallone

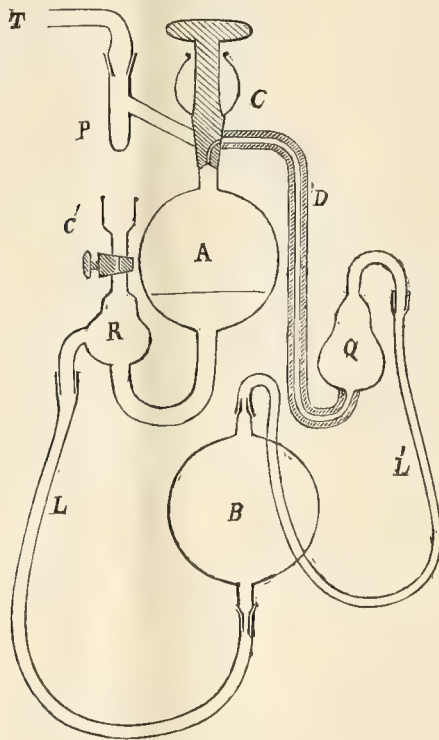



Fig. 1.

mobile la cui capacità è un pò maggiore di quella del pallone fisso, C il rubinetto che stabilisce la comunicazione del pallone A col tubo T in cui si vuol fare il vuoto, oppure col tubo D, e quindi coll' atmosfera. Il pallone A comunica inferiormente con un tubo ricurvo ad U che termina col rubinetto C'; sotto a questo lo stesso tubo presenta un rigonfiamento periforme R, nella parte larga del quale è saldato il corto tubo ricurvo all' ingiù in cui s' adatta il tubo di gomma a pareti spesse L che conduce al pallone mobile B. Il rubinetto C porta ai due lati due tubi; a quello di sinistra, che è inclinato all' insù, è saldato un tubetto o palloncino P ove si colloca l' acido solforico o l' anidride fosforica precedentemente fusa, per disseccare, e su questo palloncino s' adatta a smeriglio e con grasso, oppure non a smeriglio ma con mastice il tubo T in cui si vuol fare il vuoto. Il tubo di destra D del rubinetto C stabilisce la comunicazione coll' atmosfera, esso ha un diametro interno di 2 mm. circa, è ripiegato all' ingiù per circa 20 cm. e co-

munica con un pozzetto Q che termina superiormente con un tubetto ricurvo all'ingiù; in questo s'adatta ed è legato a tenuta d'aria un tubetto di gomma L', a pareti un po' spesse, lungo circa 1 metro e coll'altra estremità libera. Finalmente il pallone mobile termina superiormente con un tubo un po' assottigliato, in modo da potervi facilmente adattare l'estremità libera del tubo di gomma L'; questo tubo dev'essere lungo 15 a 20 cm., oppure dev'essere circondato provvisoriamente con un tubo più largo, fissato mediante un tappo, per evitare che quando s'abbassa il pallone, il mercurio per inerzia schizzi fuori dal pallone medesimo.

Il modo di procedere per fare il vuoto con questa pompa non differisce essenzialmente da quello solito, tuttavia sono utili le seguenti avvertenze: la quantità di mercurio dev'esser tale che quando il pallone mobile è alla sommità della corsa, il pallone fisso ed i pozzetti R e Q siano pieni di mercurio; abbassando poi il pallone mobile, esso deve riempirsi completamente di mercurio. Se il pallone B fosse troppo grande, occorrerebbe aggiungere tanto mercurio da ottenere le condizioni suddette, e se esso fosse troppo piccolo occorrerebbe limitare la corsa discendente e fermarlo quando il mercurio minaccia di traboccare.

Prima di procedere a fare il vuoto occorre scacciare l'aria dal pozzetto R, sollevando a tal uopo il pallone mobile, aprendo il rubinetto C' e richiudendolo quando l'aria è espulsa; quest'operazione poi si dovrà ripetere ogni qualvolta l'aria che si è sviluppata dal tubo di gomma e che rimane prigioniera in R pregiudica il buon funzionamento della pompa, sia impedendo al pallone fisso di vuotarsi completamente, sia penetrando nel pallone stesso. È bene poi non aprire il rubinetto C' o qualsiasi altro rubinetto, senza assicurarsi bene che la pressione sia poco diversa ai due lati di esso, per evitare che il mercurio sia proiettato troppo violentemente.

Ciò premesso, le operazioni per far il vuoto sono le seguenti: stabilita la comunicazione A D si solleva il pallone mobile finchè il mercurio riempia quello fisso; si chiude il rubinetto C; si abbassa il pallone mobile finchè nel pallone fisso si formi un po' di vuoto; si apre lentamente la comunicazione A T sollevando più o meno il pallone mobile se il mercurio è spinto troppo violentemente, e poi abbassandolo finchè il pallone fisso si vuota; si richiude il rubinetto C; si solleva il pallone mobile finchè il mercurio è ad ugual altezza nei due palloni; si stabilisce la comunicazione A D e si continua a sollevare il pallone mobile finchè quello fisso è pieno di mercurio e l'aria ne è completamente scacciata; si chiude il rubinetto C; si abbassa il pallone mobile finchè in quello fisso comincia a formarsi un po' di vuoto e così di seguito.

Allorchè la quantità d'aria aspirata è molto piccola, per scacciarla interamente si procede nel modo seguente: essendo il pallone mobile in basso e quindi pieno di mercurio, si chiude come precedentemente il rubinetto C e si

adatta l' estremità libera del tubo di gomma L′ nell'estremità affilata del pallone mobile; tale congiunzione può esser resa facile e buona mediante un po' di grasso, ma non occorre che essa sia forzata, nè occorrono legature.

Ciò fatto si solleva il pallone mobile nel quale, abbassandosi il mercurio, si produce un vuoto parziale, e quando il mercurio è giunto verso la parte superiore del pallone fisso, si stabilisce la comunicazione AD e così l'aria si precipita dal pallone fisso nel vuoto del pallone mobile; si continua a sollevare il pallone mobile finchè un po' di mercurio sia giunto nel pozzetto Q (occorre qui aver cura di evitare che l'accelerazione del mercurio sia pregiudizievole) e qualora questo sia troppo pieno di mercurio se ne aspira un poco, indietro abbassando un poco il pallone mobile ma poi risollevandolo per scacciare le traccie d'aria trascinata col mercurio; si chiude il rubinetto; si abbassa il pallone mobile finchè quello fisso è vuoto; si stabilisce la comunicazione AT, la si richiude; si solleva il pallone mobile e così di seguito.

Allorchè si crede che nel pallone mobile si sia accumulata tropp' aria, proveniente dal pallone fisso o penetrata dalle congiuzioni, si abbassa il pallone mobile, e quando questo è quasi pieno di mercurio e l' aria interna un po' compressa, si stacca per un momento il tubo L′ dal pallone mobile e si lascia così sfuggire l' eccesso d' aria; si riadatta il tubo di gomma e si procede come precedentemente.

Un piccolo inconveniente molto dannoso, ma molto facile a rimediare, è il seguente: avviene facilmente che una bolla di mercurio si ferma per adesione nel foro del rubinetto e quindi lo ostruisce, e non può esser scacciata nè dalla pressione minima dell' aria rarefatta, nè per mezzo di scosse, e la rarefazione non può progredire. Si rimedia a ciò, sia facendo il foro del robinetto piuttosto largo e conico col vertice in alto, sia praticando nelle pareti di esso foro mediante una limetta una scanalatura (in quest' operazione è ben proteggere la parte smerigliata avvolgendola con carta spessa, perchè la lima molto facilmente sdrucciola e va a scalfire e guastare tale parte essenziale del rubinetto) che il mercurio a causa della sua grande tensione superficiale non può riempire; così la comunicazione non è mai interrotta. Se la pompa dopo fatto il vuoto deve rimanere per molte ore inattiva, conviene lasciare il pallone mobile nella sua posizione più alta, per evitare che l'aria che si svilupperebbe o penetrerebbe dal tubo di gomma, finisca per penetrare nel pallone fisso.

Il pozzetto Q si può sopprimere senza grande inconveniente, ma allora occorre ogni tanto far cadere nel pallone mobile il mercurio contenuto nel tubo di gomma L′ e che ostruisce la comunicazione; ciò si fa facilmente quando il pallone mobile è in alto e quindi vuoto, e perciò occorre sollevare il tubo di gomma L′ incominciando da B, verso D. Si potrebbe altresì mantenere il tubo L′ fissato a D e B ma occorrerebbe interporre in qualche

punto di esso un rubinetto a 3 vie per eliminare l'aria aspirata. Credo perciò che la disposizione prima descritta sia la più semplice e comoda.

La parte fissa di questa pompa può essere adattata su un pezzo di tavola di 20 o 30 cm. di lato nel cui mezzo si pratica un largo foro a pareti coniche in cui s'adatta il bulbo del pallone; questa tavola poi può essere fissata nel mezzo d'una base orizzontale. Spesso però per fissare la pompa mi sono servito di un sostegno Bunsen con 4 delle sue morse, due delle quali s'adattavano leggermente sopra e sotto il pallone, mentre le altre due serravano i tubi di gomma L ed L' presso la congiunzione colla parte fissa. In tal modo il pallone è fissato stabilmente, e nè gli urti dei tubi di gomma nè il peso del mercurio possono recargli nocumento.

Per sollevare e abbassare il pallone mobile, è comodo far uso d'una manovella che solleva un corsoio, ma non di rado ne ho fatto a meno senza inconvenienti e ho tenuto e sollevato e abbassato il pallone mobile direttamente colle mani, essendo seduto di fronte alla pompa; è utile solo preparare due sostegni, uno alto e l'altro basso, su cui collocare o appendere il pallone quando ciò occorre. Tuttavia le prime volte che si adopera la pompa in tal modo è necessaria molta cura per evitare inconvenienti facili a immaginare.

Con questa pompa è possibile, ma non facile nè esatto, determinare la pressione dell'aria rarefatta, comprimendo quest'aria entro il pallone fisso finchè occupi solo il foro del rubinetto C, e misurando in tali condizioni il dislivello del mercurio nei due palloni, e supponendo noti in precedenza la capacità del pallone e quella del foro del rubinetto, dedurne nel modo solito la pressione cercata; tuttavia la misura del dislivello del mercurio nei due palloni non è comoda, a meno che il pallone fisso non sia provvisto in basso d'una parte cilindrica. Una misura approssimata si può anche avere osservando il volume della bollicina d'aria espulsa quando trovasi nel tubo D alla pressione atmosferica.

La forma di pompa di cui mi sono servito più spesso è quella rappresentata nella figura 2; non m'è parso che essa fosse più efficace della precedente, ma è un po' più comoda per l'uso, offre maggior guarentigia che l'aria proveniente dal tubo di gomma non penetri nel pallone fisso e che l'aria che si vuol scacciare venga espulsa totalmente, e finalmente permette una misura facile e molto esatta della pressione dell'aria residua. Del resto questa forma deriva direttamente dalla precedente (e non differisce molto da un'altra forma anteriormente descritta); il tubo D ed il tubo C' sono dalla stessa parte e congiunti, ed ho aggiunto una nuova bolla per trattenere l'aria proveniente dal tubo di gomma.

Così la pompa consiste del pallone A col rubinetto C e col palloncino P dell'acido solforico come la pompa precedente. Al disotto del pallone A il tubo si ricurva ad U, presenta un rigonfiamento E, poi si ristringe in H, e presenta quindi una bolla, che comunica con un rubinetto a tre vie C'.

Questo ha le tre vie a 120° una dall' altra, e permette di stabilire la comunicazione del tubo D e del tubo F fra loro o coll' atmosfera. È da notare che la bolla E trovasi un po' sotto il pallone A, e che la bolla F, la cui parte inferiore è cilindrica, trovasi all' altezza del maschio del rubinetto C, in modo che la base del maschio e il fondo della parte cilindrica siano su

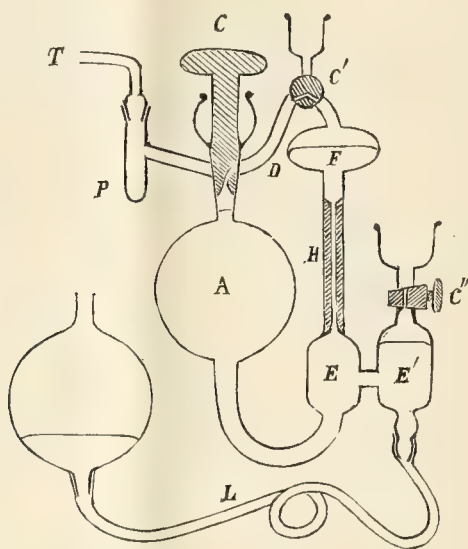



Fig. 2.

una stessa orizzontale. Finalmente nella bolla E è saldato lateralmente un corto tubo, che conduce ad una bolla simile E′ chiusa superiormente da un tappo smerigliato o meglio da un rubinetto C″, che inferiormente comunica col tubo di gomma che conduce al pallone mobile; è utile che il tubo in cui s'adatta il tubo di gomma, sporga un poco dentro la bolla E′, perchè così è più difficile che l'aria proveniente dal tubo di gomma sia trascinata dal mercurio in E ed in F.

Per fare il vuoto con questa pompa occorre anzitutto scacciare l' aria da E′ e da F, ciò che si ottiene sollevando il pallone mobile e disponendo convenientemente i rubinetti C′ e C″; e questa operazione bisogna ripeterla ogni qualvolta si ritiene che l' aria sviluppatasi dal tubo di gomma pregiudichi al buon funzionamento della pompa; in seguito, stabilita col rubinetto C′ la comunicazione D-atmosfera, si procede affatto come colla pompa precedente.

Quando però la quantità d' aria che si vuol scacciare è molto piccola, la si scaccia anzitutto dal pallone A ed anche dal tubo D nell'atmosfera e poscia col rubinetto C′ si stabilisce la comunicazione DF; così al successivo colpo di pompa, operando come precedentemente, l' aria aspirata viene scac-

ciata non più nell'atmosfera ma nella bolla F ove trovasi un buon vuoto. Dopo alcuni colpi di pompa, l'aria accumulata in F viene scacciata nell'atmosfera mediante il rubinetto C'.

Quando si vuol misurare la pressione dell'aria residua, supposto che il tubo T comunichi col pallone A e questo sia vuoto di mercurio, si chiude il rubinetto C e si solleva il pallone mobile finchè il mercurio giunga in quello fisso alla base del rubinetto (o a un punto più basso se la pressione è troppo forte). In tal modo l'aria che prima occupava tutto il pallone fisso trovasi ridotta in un volume noto più che 1000 volte minore, ed avrà una pressione d'altrettanto maggiore data dal dislivello del mercurio in A ed in F. Qualora nella bolla F si trovasse una quantità sensibile di aria, conviene scacciarla e ripetere la misura della differenza di livello. È utile notare che sebbene in questa misura il volume dell'aria venga grandemente ridotto, non v'è errore notevole di capillarità nella misura della pressione, perchè i due rami del manometro hanno ugual diametro; si può altresì comprimere l'aria entro il foro del rubinetto ed evitare tuttavia l'errore di capillarità, qualora, come indicai in altra Nota, le pareti del foro siano a 45° dalla verticale, e quindi la superficie del mercurio riesca piana.

Si potrebbe, come nella pompa precedente, utilizzare il vuoto che si produce nel pallone mobile, riunendo questo pallone e la sommità del rubinetto C' mediante un tubo di gomma, ma credo che tale complicazione sarebbe praticamente superflua.

Riguardo alla perfezione del vuoto ottenibile da queste pompe, anzitutto è da notare che poichè esse per le loro parti essenziali e per il loro modo di funzionare non differiscono essenzialmente da quelle di Geissler, non v'è ragione perchè debbano funzionare meno bene. Invece è da notare che mentre una pompa di Geissler della forma solita non potrebbe funzionare bene qualora i rubinetti fossero imperfetti, colle pompe sopradescritte ottenni facilmente le rarefazioni occorrenti per un'abbondante produzione di raggi Röntgen con rubinetti visibilmente imperfetti, nei quali l'aria penetrava in modo visibile dall'esterno e gorgogliava lentamente nel mercurio del tubo D; perchè potei facilmente rimediare a tale inconveniente col versare un po' di mercurio nell'imbutino del rubinetto C.

Per ungere i rubinetti e la congiunzione smerigliata usai dapprima la vaselina resa più densa con un forte e prolungato riscaldamento, che la priva altresì delle parti volatili; in seguito però trovai più conveniente una mescolanza di colofonia e vaselina condensata fuse assieme in tali proporzioni da fornire una viscosità conveniente; questa miscela è quasi affatto trasparente e rende trasparenti i rubinetti e non solo presenta una grande resistenza al passaggio dell'aria, ma lo rende manifesto qualora esso si produca.

Come mastici usai, come dissi in altra Nota, le mescolanze di colofonia con gomma elastica, oppure con paraffina poco fusibile, o con vaselina con-

densata; la miscela con gomma elastica talvolta non si produce completamente ed è inoltre opaca, le altre due miscele sono trasparenti, e quando sono scaldate fortemente sono fluidissime, riempiono così tutti gl' interstizî, e bollono difficilmente. La ceralacca, invece, che si usa comunemente, è opaca e non lascia vedere i possibili difetti delle congiunzioni, se scaldata poco è viscosa, se scaldata troppo bolle e rende così difficile una buona congiunzione, e finalmente a causa forse della trementina che essa contiene, emette una quantità notevole di vapori.

Descrissi in un' altra Nota i tubi di Röntgen molto semplici di cui mi servii; rammenterò che essi erano formati da tubetti d' assaggio di 6 a 10 mm. di diametro con tubo laterale per la congiunzione colla pompa, e chiusi da un tappo di sovero coperto da uno spesso strato di mastice e attraversato da un filo d' alluminio che portava il catodo. Le pareti, a causa della loro piccola estensione, emettono piccola quantità di gaz e la rarefazione procede con velocità poco diversa dalla teorica, e bastano 6 o 7 colpi di pompa ossia 6′ o 7′ perchè la pressione scenda da quella atmosferica a quella occorrente per la produzione dei raggi suddetti. Scacciando poi l' aria aspirata nell' ultimo colpo di pompa, e lasciando scendere il pallone mobile per gradi a intervalli più o meno lunghi, si mantiene facilmente per un tempo abbastanza lungo, nonostante i gas che continuamente si sviluppano dalle pareti, la rarefazione massima desiderata.

La forma 1 di pompa non presenta nessuna difficoltà di costruzione, e può quindi essere costruita da chiunque lavori anche molto mediocremente il vetro; però la forma di rubinetto C che trovasi correntemente in commercio, non ha imbuto ed ha un foro trasversale che stabilirebbe la comunicazione T D e che bisogna chiudere con gesso, reso poi impermeabile con grasso fuso.

La forma 2 che presenta un O irregolare in vetro, offre la nota difficoltà che due saldature, una a ciascun lato dell' O devono esser fatte contemporaneamente, affinchè entrambi i lati si raffreddino e contraggano contemporaneamente; altrimenti il vetro dell' ultima saldatura raffreddandosi subisce una forte trazione, e quindi inevitabilmente si rompe. Sono però riuscito ad evitare questa rottura, tirando fortemente le estremità del lato freddo dell' O mentre il vetro della saldatura nell'altro lato era ancor molle, e diminuendo tale trazione a misura che la saldatura si raffreddava; in questo modo entrambi i lati dell' O si contraevano contemporaneamente, uno per la diminuita trazione, l'altro per il raffreddamento. Non ebbi occasione di ripetere tale prova, ma mi pare che l'esito debba esser sicuro se la trazione, che si può esercitare comodamente mediante pesi, è la massima possibile senza avvicinarsi troppo al limite di rottura. Alla trazione potrebbe esser sostituito meno comodamente un riscaldamento moderato di tutto un lato, mentre in

un punto dell'altro si effettua la saldatura, e poscia il raffreddamento simultaneo di entrambi i lati [1].

Fisica. — *Sulla variazione della costante dielettrica del caoutchouc per la trazione.* Nota dei dott.ri O. M. Corbino e F. Cannizzo, presentata dal Socio Blaserna.

Chimica. — *Sopra due altre desmotroposantonine.* Nota di A. Andreocci e di P. Bertolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Cristallografia. — *Zolfo ed altri minerali della miniera di Malfidano presso Buggerru (Sardegna).* Nota del dott. Federico Millosevich [2], presentata dal Socio Struever.

I minerali descritti nella presente Nota mi furono inviati nello scorso maggio dal mio amico dott. Alfredo Lotti, allora chimico nelle miniere di Buggerru; egli ne permise lo studio e generosamente ne fece dono al Museo Mineralogico della R. Università di Roma, e perciò mi è grato attestargli qui pubblicamente le dovute grazie.

Minerali della miniera di Malfidano non furono sin qui descritti dal lato cristallografico, e per questa ragione e per la bellezza di taluni cristalli mi è parso degno di qualche interesse il presente studio.

Zolfo. — I cristalli di zolfo si trovano impiantati insieme ad altri più numerosi di anglesite in una geode dentro la galena blendosa. Quantunque di piccole dimensioni, i più grandi infatti raggiungono appena mm. 1,5 nel maggior diametro, sono ricchissimi di facce tutte perfette e lucenti, cosicchè malgrado la loro piccolezza ben si prestano ad uno studio cristallografico.

[1] A. Treffurth (Ilmenau in Thüringen, Germania) che ebbe da me il disegno in grandezza naturale, costruisce la parte in vetro della forma 2 di pompa e la spedisce per pacco postale per il prezzo di circa L. 20. Rivolgendosi a intermediari che non costruiscono ma fanno costruire la pompa, il costo può diventare doppio o triplo. Le due figure di questa Nota sono state fatte all'incirca di $^1/_3$ della vera grandezza e sono proporzionate, almeno nelle parti essenziali.

[2] Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Roma.

Nei cristalli osservati si riscontrano le seguenti forme:

$a\,\}100\{\ \infty\bar{P}\infty$. $b\,\}010\{\ \infty\breve{P}\infty$. $c\,\}001\{\ 0P$.
$m\,\}110\{\ \infty P$.
$n\,\}011\{\ \breve{P}\infty$. $v\,\}013\{\ \frac{1}{3}\breve{P}\infty$.
$e\,\}101\{\ \bar{P}\infty$. $u\,\}103\{\ \frac{1}{3}\bar{P}\infty$. $\varphi\,\}305\{\ \frac{3}{5}\bar{P}\infty$*.
$p\,\}111\{\ P$. $\psi\,\}119\{\ \frac{1}{9}P$. $\omega\,\}117\{\ \frac{1}{7}P$. $t\,\}115\{\ \frac{1}{5}P$. $o\,\}114\{\ \frac{1}{4}P$. $s\,\}113\{\ \frac{1}{3}P$.
$y\,\}112\{\ \frac{1}{2}P$. $\delta\,\}221\{\ 2P$. $\gamma\,\}331\{\ 3P$.
$\chi\,\}122\{\ \breve{P}2$. $q\,\}131\{\ 3\breve{P}3$. $x\,\}133\{\ \breve{P}3$. $z\,\}135\{\ \frac{3}{5}\breve{P}3$. $\lambda\,\}155\{\ \breve{P}5$*.
$r\,\}311\{\ 3\bar{P}3$. $\alpha\,\}313\{\ \bar{P}3$. $\beta\,\}315\{\ \frac{3}{5}\bar{P}3$. $\mu\,\}319\{\ \frac{3}{9}\bar{P}3$*.

Le forme segnate con asterisco sono nuove.

Per ricchezza di facce questi cristalli superano tutti quelli di altre località fin qui descritti: infatti si osservano in un solo cristallo ben 27 forme semplici (v. fig. 1).

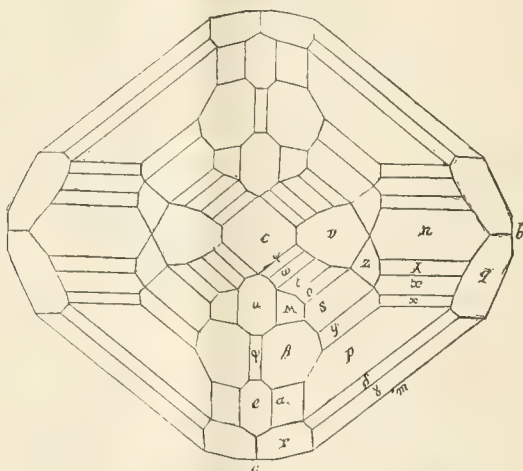



Fig. 1.

Predominante è la zona delle protopiramidi e di queste $p\,\}111\{$ e $s\,\}113\{$ quasi con eguale sviluppo e subordinatamente $y\,\}112\{$: le altre numerose forme di questa zona sono rappresentate da faccette piccolissime, segnatamente $\psi\,\}119\{$, $\omega\,\}117\{$ e $o\,\}114\{$; quest'ultima anzi fu constatata in un solo cristallo. Delle altre piramidi prevalgono $q\,\}131\{$, $\beta\,\}315\{$ ed $\alpha\}313\{$: tutte le altre si presentano con piccole ma nitidissime faccette. Notevolissima la povertà di facce della zona prismatica, essendovi dei prismi verticali il solo $m\,\}110\{$ che si presenta con una sottilissima faccetta. Nella zona dei macrodomi le faccette sono piccolissime, in quella dei brachidomi sempre ben sviluppato $n\,\}011\{$.

Il pinacoide a }100{ manca in molti casi ed è sempre dove appare piccolissimo: di discrete dimensioni invece b }010{ e c }001{.

Le forme φ }305{ λ }155{ e μ }319{ sono nuove per lo zolfo.

Il macrodoma φ }305{ si presenta con una lunga e stretta faccettina fra e }101{ e u }103{: lo scarso riflesso non permise una misura angolare molto esatta:

angolo $c:\varphi$ = (001) : }305{ = (misurato) 54°49′ (calcolato) 54°33′ [1].

Il simbolo (305) risulta dalle zone [001 : 100] e [315 : 010].

La piramide λ }155{ si presenta con una nitida faccetta nella zona [100 : 011]

angolo $a:\lambda$ = (100) : }155{ = (misur.) 77°45′ (calcol.) 77°43′.

Il simbolo di μ }319{ fu determinato con le zone [001 : 311] e [010 : 103]

angolo $c:\mu$ = (001) : }319{ = (misur.) 38°52′ (calcol.) 38°57′15″.

Per la ricchezza di facce, per il predominio della zona delle protopiramidi, per lo scarso sviluppo delle forme prismatiche i cristalli di zolfo di Malfidano somigliano di molto a quelli dell' isola di Saba (Indie occidentali) studiati dal Molengraaff [2]. Infatti nei primi si trovano tutte le forme descritte dal Molengraaff, tranne il brachidoma ϑ }031{ (del resto raro anche per i cristalli di Saba) e vi si trovano in più, oltre le nuove forme sopra descritte, le piramidi ψ }119{ e χ }122{. La prima è da lungo tempo nota: infatti osservata per la prima volta da v. Zepharovich [3] nello zolfo di Swozzowice in Galizia, fu confermata poi da E. Dana [4] per lo zolfo Rabbit Hollow (Nevada) e da K. Busz [5] per lo zolfo di Bassik (St. Uniti d'Amer.) e di altre località. La piramide χ }122{ fu invece una prima ed unica volta constatata da A. Pelikan [6] nello zolfo di Allchar in Macedonia come una stretta troncatura fra le facce (111) e (133): qui invece si presenta con nitide faccettine ed ha permesso una misura esatta:

angolo $p:\chi$ = (111) : (122) = (misur.) 18°50′30″ (calcol.) 18°52′15″.

Dagli angoli:

(100) : (111) = 42°35′ e (001) : (111) = 71°40′

[1] Quest'angolo e gli altri riportati in questa Nota per lo zolfo furono calcolati con il rapporto parametrico di v. Kokscharow (*Materialien zur Mineralogie Russlands*, VI, 369) quale è dato nei classici trattati di E. Dana e C. Hintze.

[2] Zeitsch. f. Kryst. u. Miner., XIV, 43.

[3] *Jahrb. d. K. K. geolog. Reichsanstalt*, Wien, 1869, XIX, 225.

[4] Zeitsch. f. Kryst. u. Miner., XII, 459.

[5] Zeitsch. f. Kryst. u. Miner., XVII, 549.

[6] Tscherm. min. petr. Mitth., 1891, XII, 344.

risultò il seguente rapporto parametrico:

$$a:b:c = 0{,}81368:1:1{,}90472$$

che si avvicina di molto a quello di v. Kokscharow:

$$a:b:c = 0{,}81309:1:1{,}90339$$

quale è dato nei trattati di E. Dana e C. Hintze e secondo il quale furono calcolati gli angoli della seguente tabella:

Angoli	Num. delle osserv.	Media delle misure	Limiti delle misure	Valori calcolati	Differenze esp.-calc.
		° ′	° ′ ° ′	° ′ ″	′ ″
$c:p = (001):(111)$	6	71.40	71.38-71.42	71.39.45	0.15
$a:p = (100):(111)$	5	42.35	42.36-42.32	42.34	1
$b:p = (010):(111)$	3	53.13	53.12-53.14	53.13	0
$c:e = (001):(101)$	3	66.50.30″	66.48-66.53	66.52	— 1.30
$c:u = (001):(103)$	3	37.59.30	37.59-38.00	37.58	1.30
$c:\varphi = (001):(305)$	2	54.49	54.35-55. 3	54.33	16
$c:n = (001):(011)$	2	62.17.30	62.17-62.18	62.17	0.30
$c:v = (001):(013)$	1	32.24	—	32.23.30	0.30
$c:y = (001):(112)$	5	56.26	56.24-56.29	56.27.30	— 1.30
$c:s = (001):(113)$	6	45. 9	45. 7-45.11	45. 9.45	— 0.45
$s:u = (113):(103)$	1	26.36	—	26.34.30	1.30
$c:o = (001):(114)$	1	37. 1.30	—	37. 2	— 0.30
$c:t = (001):(115)$	3	31. 5	31. 1-31. 8	31. 6 30	— 1.30
$c:\omega = (001):(117)$	2	23.18.30	23.17-23.20	23.19	— 0.30
$c:\psi = (001):(119)$	2	18.33.30	18.33-18.34	18.32	1.30
$c:\delta = (001):(221)$	3	80.32	80.30-80.33	80.35.30	— 3.30
$c:\gamma = (001):(331)$	4	83.40.30	83.39-83.42	83.42	— 1.30
$c:r = (001):(311)$	1	82. 7.30	—	82.10.30	— 3
$c:\alpha = (001):(313)$	1	67 35.30	—	67.34	1.30
$c:\beta = (001):(315)$	1	55.35	—	55.30	5
$\beta:\varphi = (315):(305)$	1	12.21	—	12.27	— 6
$c:\mu = (001):(319)$	1	38.52	—	38.57.15	— 5.15
$a:r = (100):(311)$	1	17.14.30	—	17. 1.30	13
$p:\chi = (111):(122)$	1	18.50.30	—	18.52.15	— 1.45
$a:\chi = (100):(122)$	1	61.25	—	61.26.15	— 1.15
$a:x = (100):(133)$	2	70. 4.30	70. 4-70. 5	70. 3	1.30
$a:\lambda = (100):(155)$	1	77.45	—	77.43	2
$b:\alpha = (010):(313)$	2	75.59	75.59-75.59	76. 0.15	— 1.15
$c:q = (001):(131)$	3	80.48	80.47-80.49	80.47.45	0.15
$c:x = (001):(133)$	3	64. 4	64. 3-64. 5	64. 4.30	— 0.30
$c:z = (001):(135)$	1	50.58	—	50.59	— 1

Con queste da me constatate per lo zolfo di Malfidano, le forme conosciute di questo minerale salgono a 36.

Infatti all' elenco delle forme dato dal Molengraaff [1] e nel quale le forme citate sono 27 (togliendo la h {130} erroneamente data da Hessenberg) [2] furono in seguito aggiunte le seguenti:

$g = \{337\} = \frac{3}{7}\, P$	località:	Bassik (Stati Uniti)	K. Busz [3]
$f = \{335\} = \frac{3}{5}\, P$	"	" "	"
$\eta = \{553\} = \frac{5}{3}\, P$	"	" "	"
$\varepsilon = \{551\} = 5\, P$	"	" "	"
$\chi = \{122\} = \breve{P}\, 2$	"	Allchar (Macedonia)	A. Pelikan [4]
$F = \{151\} = 5\, \breve{P}\, 5$	"	Roisdorf bei Bonn (Germania)	K. Busz [5]
$\varphi = \{305\} = \frac{3}{5}\, \bar{P}\, \infty$	"	Malfidano (Sardegna)	F. Millosevich
$\lambda = \{155\} = \breve{P}\, 5$	"	" "	"
$\mu = \{319\} = \frac{3}{9}\, \bar{P}\, 3$	"	" "	"

Anglesite. — Insieme con i cristalli di zolfo sono impiantati altri più numerosi e più grandi di anglesite: sebbene non presentino forme nuove, pure essendo la località nuova, credo interessante darne una breve descrizione.

Sono incolori trasparenti e di discrete dimensioni raggiungendo i più grandi nel maggior diametro i 5 mm.

Le forme osservate sono le seguenti:

a {100} $\infty \bar{P} \infty$. c {001} $0\, P$.
m {110} ∞P. n {120} $\infty \breve{P} 2$
o {011} $\breve{P} \infty$.
d {102} $\frac{1}{2} \bar{P} \infty$.
z {111} P. y {122} $\breve{P}\, 2$.

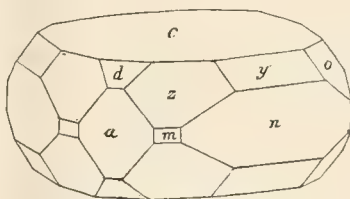



Fig. 2.

L' abito è prismatico tabulare secondo {001} con predominio del prisma n {120}.

Il pinacoide a {100} presenta sempre una ben marcata striatura verticale.

[1] Zeitsch. f. Kryst. u. Miner., XIV, 46.

[2] Hessenberg, *Mineralog. Notizen.* Senkenb Ges., VII, 1870, 322.

[3] Zeitsch. f. Kryst. u. Miner., XVII, 549; XX, 563.

[4] Tscherm. min. petr. Mitth., 1891, XII, 344.

[5] Zeitsch. f. Kryst. u. Miner., XX, 560. Si deve notare che il Busz nella sua Memoria denota questa nuova forma con la lettera f da lui già adoperata per la forma {335} constatata nello zolfo di Bassik: perciò come nel trattato di C. Hintze ho adottato la lettera F.

Dagli angoli $c:z = (001):(111) = 64°23'30''$ (media di 10 misure) e $a:z = (100):(111) = 44°50'$ (media di 6 misure) ho calcolato il rapporto parametrico:

$$a:b:c = 0{,}78547:1:1{,}28877.$$

Quello dato da v. Kokscharow (¹) è il seguente:

$$a:b:c = 0{,}78516:1:1{,}28939$$

e secondo questo sono calcolati gli angoli della seguente tabella:

angoli	n. delle osserv.	misurati	calcolati
		° ′ ″	° ′ ″
(001):(111)	10	64.23.30	64.24.30
(100):(111)	6	44.50	44.49
(102):($\bar{1}$02)	6	78.45	78.46.45
(001):(122)	3	56.44.30	56.48.30
(011):(0$\bar{1}$1)	2	104.19	104.24.30
(120):($\bar{1}$20)	3	64.57	64.58.45
(110):(120)	3	19.22	19.22.30
(102):(111)	1	38.20.30	38.22.30
(111):(122)	2	18.26	18.28.15
(011):(122)	1	26.46	26.42.45

Baritina. — In una geode di un altro campione di galena blendosa e sparsi su di un campione di calamina si trovano dei cristalli laminari di baritina. Ho potuto esaminare i primi che sono di un color verde giallastro e presentano la seguente semplicissima combinazione:

$c\,\{001\}\,0\,P.$ $m\,\{110\}\,\infty P.$ $o\,\{011\}\,\breve{P}\infty.$ $z\,\{111\}\,P.$

Si presentano come sottilissime laminette secondo $\{001\}$.

Patologia. — *I parassiti endoglobulari dei pipistrelli.* Nota del dott. Antonio Dionisi, presentata dal Socio B. Grassi.

Dopo la scoperta del parassita della malaria dell' uomo furono praticate numerose osservazioni sul sangue di altri mammiferi, con lo scopo di stabilire, se infezioni analoghe fossero determinate negli animali dagli stessi parassiti o da parassiti somiglianti a quelli del globulo rosso dell' uomo. Fu dimostrato che il *pirosoma*, agente della febbre del Texas, il parassita, dell' infezione *ittero ematurica* delle pecore e del cane e il parassita trovato

(¹) *Materialien zur Mineralogie Russlands,* I, 34, 1853; II, 167, 1854-1857.

recentemente da Koch nelle scimmie, hanno alcuni caratteri morfologici e biologici comuni a quelli della malaria umana.

Continuare le ricerche con la speranza di riuscire a dimostrare forme parassitarie, somiglianti a quelle della malaria umana, negli altri mammiferi, finora non sottoposti a ricerca, era compito facile a prefiggersi e pieno di lusinghe.

Se si pensa alla via trionfale, percorsa da Smith e Kilborne, per l' infezione determinata dal *pirosoma* nei bovini, e all' importanza dei fatti messi in rilievo da quegli osservatori, per quanto riguarda il modo di prendere l' infezione, s' intende facilmente come tale campo di ricerche attraesse, potendo esse, se positive, aprire una via agevole per la soluzione del problema riferentesi alla malaria umana — come l' uomo contrae l' infezione malarica — problema che ha occupato finora mente e cuore di tanti osservatori.

Scelsi tra i mammiferi i pipistrelli per caso: e devo al professor Grassi tutta la mia riconoscenza per avermeli forniti. Com' ebbi l' onore di annunziare nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (vol. VII, f. 8°) rinvenni nel *Miniopterus Schreibersii* un parassita molto somigliante a quello della febbre quartana.

Ricerche ulteriori su altre specie di pipistrelli come ad esempio il *Vespertilio murinus*, tanto comune nella campagna romana, mi hanno dato pure risultato positivo.

Ho riscontrato in quest' ultima specie di pipistrelli, parassiti occupanti una metà del globulo rosso poco mobili, con granuli di pigmento piuttosto grossi, forme libere adulte e forme di disgregazione. Questi parassiti sono difficilmente colorabili con i metodi comuni: la migliore colorazione si ottiene col liquido di Romanowski, col quale la struttura caratteristica del parassita è messa molto bene in evidenza. La cromatina è disposta, nelle forme adulte del parassita, che sono le più frequenti a riscontrarsi, eccentricamente in forma di blocco più o meno spesso e voluminoso, o divisa in fibrille, circondata da una zona acromatica poco distinta e dal corpo protoplasmatico tinto leggermente in bleu. Nelle forme giovani la cromatina e il protoplasma offrono lo stesso aspetto di quelle della febbre quartana. Nella maggior parte degli animali esaminati, pur prevalendo la forma adulta, non mi è stato possibile, in questa specie di pipistrelli, trovare forme di moltiplicazione caratteristiche. Ho potuto constatare la presenza di parecchie forme libere pigmentate coi caratteri delle forme degenerative: anzi in alcuni pipistrelli costituivano quasi l' unico reperto.

A me pare di poter desumere dalle osservazioni, finora compiute, che in parecchi di questi animali l' infezione si vada estinguendo, basandomi specialmente sul fatto della scarsezza del reperto parassitario e dalla predominanza delle forme degenerative.

Il ciclo di queste forme, per quanto riguarda il tempo in cui si compie, non mi è stato possibile di precisare: devo però aggiungere che le specie di pipistrello in parola sono già cadute in letargo e che non è inverosimile che, durante questo periodo, possa accadere che i parassiti endoglobulari non continuino nel loro sviluppo. Questo fatto dal punto di vista biologico del parassita sarebbe di grande interesse, ma non può essere risoluto che nella stagione di primavera prossima.

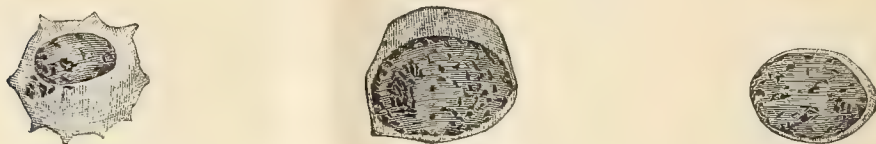



Fig. 1.

Quanto alle alterazioni del sangue indotte da questa specie parassitaria, non ne ho constatate degne di essere rilevate. Quanto alla proporzione degli animali infetti coi sani posso stabilire una cifra approssimativa di uno a dieci.

Perciò tanto nel *Miniopterus Schreibersii* che nel *Vespertilio murinus* rimane dimostrata la presenza di un parassita analogo a quello delle forme primaverili dell' uomo e molto somigliante a quello della quartana.

Un altro fatto che ha suscitato tutto il mio interesse è stata la constatazione in alcuni individui della specie *Vesperugo noctula* Schreb. di un parassita, morfologicamente analogo alle forme estivo-autunnali dell' uomo.

Nel sangue di questa specie di pipistrello il numero delle forme parassitarie è così grande, da potersi paragonare a un abbondante reperto delle febbri perniciose. Si notano forme anulari discoidi, alcune in attivissimo movimento, in modo da assumere le forme più svariate da una croce greca a un fuso, disposto lungo uno dei diametri del globulo rosso, di dimensione varia da un quinto a un sesto di globulo rosso sino a due terzi circa. In più di dieci giorni di accurate osservazioni ho notato costantemente lo stesso reperto parassitario in vari individui: il parassita non si pigmenta mai, almeno nel periodo di tempo delle mie ricerche. È tale la somiglianza morfologica del parassita con quello delle febbri estivo-autunnali, che dall'esame a fresco è impossibile distinguerlo dalla fase senza pigmento del parassita estivo.

Figure di segmentazione nel sangue periferico non ho potuto rinvenire. Dopo alcuni giorni di osservazione ho potuto notare in alcuni pipistrelli, che alcuni globuli rossi assumono coll'esame a fresco un tono di colore che s'avvicina a quello dei globuli rossi ottonati dell' uomo: il numero di questi globuli è andato aumentando nei giorni successivi dell' osservazione. Questo fatto e l'apparenza del sangue mi hanno indotto a ricercare l'emoglobina nei

pipistrelli infetti, e ho trovato che l'emoglobinometro di Fleischl ha segnato quaranta, mentre non è determinabile colla scala del Fleischl il grado corrispondente per animali sani della stessa specie, superando il tono di colore del sangue dei pipistrelli normali il massimo stabilito per l'uomo. Perciò posso stabilire con sicurezza che l'animale si anemizza.

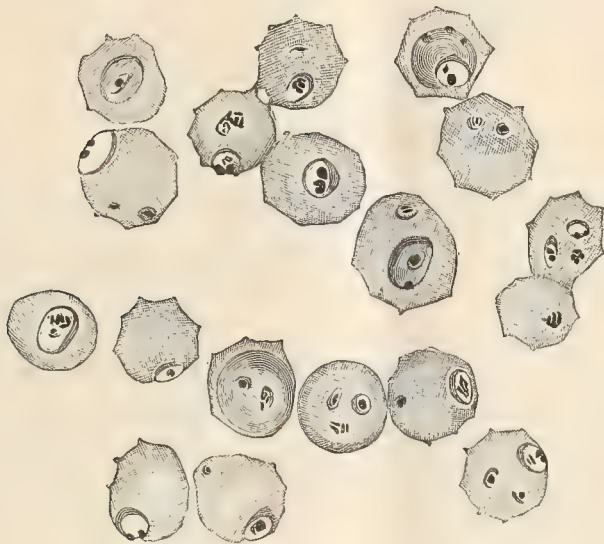



Fig. 2.

Quanto alla struttura del parassita, mi sono servito per studiarla del metodo di Romanowski. Gli altri metodi o riescono insufficienti o negativi. La struttura del parassita non si mostra in nulla differente da quella delle febbri estivo-autunnali tanto nelle forme anulari che nelle discoidi, tanto nelle forme piccole che nelle grandi. Si nota una grande ricchezza di cromatina, disposta ora in blocchi, ora in filamenti, ora occupante nelle forme anulari la periferia dell'anello, ora il centro. In alcune forme si nota la figura di cromatina con la zona acromatica e non si vede il corpo protoplasmatico.

Rimane perciò stabilita nel pipistrello la presenza di due parassiti, uno rassomigliante alle forme quaternarie pigmentato e un altro rassomigliante alle forme estivo-autunnali senza pigmento.

Un' alterazione che ho potuto constatare, coi preparati colorati, nel sangue è quella che corrisponde alla degenerazione anemica di Ehrlich; è spiccatissima nel sangue del pipistrello, contenente le ultime forme descritte.

Contemporaneamente a questi parassiti endoglobulari, ho riscontrato negli stessi individui una specie di *tripanosoma* analogo a quello che Koch ha trovato nel topo e che il prof. Grassi aveva già notato nei pipistrelli di Catania.

Ora che è provata anche per l'uomo la verità della teoria dell'inoculazione per mezzo delle zanzare, quale interesse rimane a questi studî dal punto di vista pratico? Se si riuscisse a dimostrare con prove, che saranno iniziate di qui a qualche giorno, l'identità dei parassiti visti nei pipistrelli con quelli dell'uomo, si disporrebbe di un materiale da esperimento di grande utilità.

Mi pare degno di nota il fatto che la specie di pipistrelli che ha parassiti, somiglianti a quelli dell'infezione estivo-autunnale dell'uomo, non è ancora caduta in letargo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente ricorda le perdite subìte durante le ferie dall'Accademia, nelle persone dei Soci Gibelli e Cohn; ed il Corrisp. Pirotta pronuncia brevi parole riassumendo l'opera scientifica dei due defunti accademici.

Il Segretario Blaserna dà comunicazione delle lettere di ringraziamento per la loro recente nomina, inviate dai Socî nazionali: Righi, Ròiti, Pacinotti, Scarabelli Gommi-Flamini, ed Emery; dal Corrispondente Somigliana; e dai Socî stranieri: Greenhill, Voigt, Röntgen, Karpinski, Geikie e Lankester.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dal Corrisp. Pirotta e dal Socio straniero Gegenbaur. Richiama inoltre l'attenzione della Classe sul vol. VII della edizione nazionale, sotto gli auspici di S. M. il Re, delle *Opere di Galileo Galilei*; sui *Souvenirs de Marine* del vice ammiraglio Paris, dono dell'Accademia delle scienze di Parigi; e sul fasc. 12° dei *Risultati delle campagne scientifiche* del Principe di Monaco.

Il Socio Ròiti fa omaggio del vol. I della sua opera: *Elementi di fisica.*

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Blaserna annuncia alla Classe che nell'Annuario accademico del prossimo anno sarà sostituito nel programma dei concorsi ai premî Reali, il nuovo testo dell'art. VII, proposto dal Consiglio di Amministrazione e approvato dall'Accademia nell'adunanza generale dell'11 giugno 1898.

Il nuovo testo dell' art. VII è il seguente:

« Qualora delle Memorie o Scoperte relative ad un determinato gruppo « di scienze e presentate entro il termine prescritto al concorso per il premio « Reale, niuna abbia conseguito il premio stesso, l' Accademia sottopone « all' approvazione di S. M. il Re le sue proposte circa il modo di erogare « il relativo fondo in pro' degli studî e preferibilmente di quelli ai quali « si riferiva il premio non conferito ».

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale di Londra; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Sydney; la R. Scuola Navale di Genova; l' Istituto Smithsoniano di Washington; il Museo di zoologia comparata di Cambridge Mass.; la Scuola politecnica di Delft.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

La R. Accademia delle scienze di Stoccolma; la R. Società di Scienze naturali di Budapest; la Società zoologica di Londra; la Società degl' ingegneri ed architetti italiani di Roma; la Società geologica di Calcutta; il R. Istituto geodetico di Potsdam; l' Istituto geografico militare di Vienna; l' Università di Strassburg; le Scuole politecniche di Karlsruhe e di Berna; il R. Osservatorio di Greenwich; il Museo nazionale di Buenos Ayres; il Municipio di Udine.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 novembre 1898.

Albert I de Monaco. — Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son Yacht. Fasc. XII. Paris, 1898. 4°.

Barbosa Rodrigues J. — Hortus fluminensis ou breve noticia sobre as plantas cultivadas no Jardim Botanico do R. d. J. 1893. Rio de Janeiro, 1895. 8°.

Id. — Plantas novas cultivadas no Jardim Botanico do R. d. J. IV. V. Rio de Janeiro, 1894-96. 4°.

Caruso G. — Agronomia secondo le lezioni date nella r. Università di Pisa. Torino, 1898. 8°.

De Pretto O. — L' epoca glaciale e la teoria orografica. Torino, 1898. 8°.

Francé R. — Der Organismus der Craspedomonaden. Budapest, 1897. 8°.

Galilei G. — Le opere. Ed. naz. Vol. VIII. Firenze, 1898. 4°.

Jacquet J. B. — Notes on gold dredging with reference to the introduction of the industry into New South Wales. Sydney, 1898. 8°.

Kohaut R. — Libellulidae Hungariae. Budapest, 1896. 4°.

Kurländer I. — Erdmagnetische Messungen in den Ländern der Ungarischen Krone in den Jahren 1892-94. Budapest, 1896. 8°.

Laurent L. — Examen d'une collection de vegetaux fossiles de Roumanie. Bucarest, 1898. 8°.

Longo B. — Ancora su la pretesa « Cromatolisi » nei nuclei normali vegetali. Roma, 1898. 8°.

Markham C. R. — Antarctic exploration; a plea for a national expedition. London, 1898. 8°.

Motta Coco A. — Beitrag zum Studium der Hyperleukocytose und der Leucocytolisis bei der experimentellen Diplokokken-Infection. Cassel, 1898. 8°.

Id. — Reperto isto-patologico della cute in un caso di tifo che presentava il segno palmo-plantare. Torino, 1898. 8°.

Id. — Un caso di astasia-abasia emotiva su fondo isterico. Milano, 1898. 8°.

Paris (Le Vice-Ammiral). — Collection de plans ou dessins de navires et de bateaux anciens ou modernes. Paris, 1882-92, f°.

Pirotta R. e *Buscalioni L.* — Sulla presenza di elementi vascolari multinucleati. Roma, 1898. 4°.

Primics G. — Geologia d. Csetras-Gebirge. Budapest, 1896. 4°.

Roiti A. — Elementi di fisica. 4ª edizione. Vol. I, p. 1ª. Firenze, 1898. 8°.

Romiti G. — Il significato morfologico del processo marginale nell' osso zigomatico umano. Pisa, 1898. 8°.

Id. — Necrologia di Carlo Giacomini. Firenze, 1898. 8°

Róna S. — Luftdruckverhältnisse Ungarns. Budapest, 1897. 8°.

Szadeczky G. — Geologia d. Zempleni-Szigethegység. Budapest, 1897. 8°.

Verson E. — La evoluzione del tubo intestinale nel filugello. Pᵉ. 2ª. Padova, 1898. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 novembre 1898.

Presidenza del Socio anziano D. Comparetti.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Come i tubi scemano la virtù scaricatrice dei raggi X* [1]. Nota del Socio Emilio Villari.

I.

In due recenti mie Note ho mostrato che un elettroscopio posto nell' ombra dei raggi X si scarica rapidamente, un po' per le radiazioni che quasi parrebbe si flettessero nell' ombra, ed in massima parte per l' aria circostante, la quale, attraversata ed attivata dai raggi laterali e divergenti, rapidamente si diffonde e raggiunge l'elettroscopio. Ho di poi proseguite queste ricerche e qui riferirò, in breve, i risultati ottenuti.

Le esperienze vennero fatte con un Crookes a pera chiuso in una cassa di piombo a grosse pareti, che insieme ad un potente rocchetto eccitatore era chiusa in una cassa di zinco in perfetta comunicazione col suolo. Di fronte all'anticatodo le pareti delle casse erano addossate ed avevano un foro di 10 cm., dei quali l'esterno era chiuso da una lastra d'alluminio di 0,3 mm. di spessezza, per la quale venivano fuori le radiazioni. L' elettroscopio, posto a circa 1 m. dall' anticatodo, era ad una sola foglia d' oro, e così bene isolato con paraffina da conservare per più minuti la carica quasi invariata. La sua cassa di ottone, grossa 2 a 3 mm., fu ricoperta da una lastra di piombo dello spessore di 5 mm. per renderla opaca del tutto alle radiazioni. Un cannocchiale con scala osservava la foglia, illuminata da una lampada ad incandescenza, attraverso ad opportuni fori praticati nella cassa, e chiusi con vetri

[1] Nota inviata l' 11 agosto 1898.

e fitta rete metallica. La cassa era bene unita al suolo. Da ripetute prove mi assicurai, che l' elettroscopio era affatto garantito dalle induzioni ed irradiazioni perturbatrici.

Ciò premesso veniamo alle esperienze.

Con piombo dello spessore di 5 mm. costruii un tubo T alto 10 cm. e di 7,5 cm. di diametro, che per un foro nella base inferiore poteva soprapporsi alla pallina E dell'elettroscopio, fig. 1. Una lastra di piombo l, grossa 15 mm. e 12×21 cm. era fissata a 4,5 cm. dalla pallina E, in modo da riparare del tutto il tubo T dalle radiazioni del Crookes C, situato a 43 cm. da E. Il tubo T era unito al suolo e l'elettroscopio veniva caricato dall' interno. Da reiterate esperienze risultò, che il tubo T era affatto opaco ai raggi X, giacchè la scarica di $\frac{1}{2}°$ di E avveniva costantemente in circa 13 minuti, vi fosse o no la lastra o schermo l.

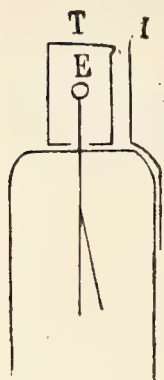



Fig. 1.

Costruii con lastra d' alluminio, dello spessore di 0,5 mm., un tubo eguale al vano interno del precedente di piombo; e da più misure incrociate fatte con l' elettroscopio coperto dall' uno o dall'altro dei tubi ottenni, per la durata delle scariche provocate dagli X, le medie seguenti:

I. Col tubo T di piombo

E perdè $\frac{1}{2}°$ in 12′ a 13′.

II. Col tubo T di alluminio

E perdè $\frac{1}{2}°$ in 6′ a 7′.

Alla lastra l ne sostituii un' altra della stessa grossezza, ma più larga (18×21 cm.) atta a coprire più estesamente il tubo T ed ottenni i valori medî seguenti:

I. Col tubo T di piombo

E perdè $\frac{1}{2}°$ in 12′ 10″.

II. Col tubo T di alluminio

E perdè $\frac{1}{2}°$ in 8′.

La scarica, adunque, è molto più rapida quando E è coperto dal tubo d' alluminio, che da quello di piombo. E siccome i tubi e l' elettroscopio son sempre nell' ombra piena dello schermo l, così bisogna ritenere, che le radiazioni penetrino in un modo qualunque nell' ombra, ed attraversino il tubo trasparente d' alluminio, accelerando la scarica di E, e non attraversino il tubo di piombo.

Per estendere le precedenti esperienze ne eseguii delle simili adoperando un tubo T di fitta rete di ottone unito al suolo, che in alcune misure rico-

privo assai strettamente con un tubo di carta sottile, ed ottenni i seguenti risultati medî.

Esperienze con lo schermo l piccolo (12 × 21 cm.).

E coperto dal tubo:

T di piombo:	E perdè $\frac{1}{2}$° in . . .	12′30″
T d'alluminio:	id. id.	7 00
T di rete	. . . .	1 45
T di rete e carta	. . . .	5′ a 6′

Esperienze con lo schermo l grande (18 × 21 cm.).

E coperto dal tubo:

T di piombo:	E perdè $\frac{1}{2}$° in . . .	12′10″
T d'alluminio:	id. id.	8 00
T di rete	. . . .	4 00
T di rete e carta	. . . .	6 46

La scarica di $\frac{1}{2}$° di E, senza tubo e con gl' X avveniva in poco più di 2″, tanto con lo schermo *l* piccolo che con quello grande.

I dati qui sopra mostrano, che la scarica di E col tubo di piombo è lentissima, ed è sensibilmente più rapida col tubo di alluminio, per le note ragioni. Essa è ancora più rapida col tubo di rete, pur rimanendo assai lenta, in confronto al caso dell' elettroscopio senza tubi, e si rallenta ancora di più quando il tubo di rete si ricopre con quello di carta.

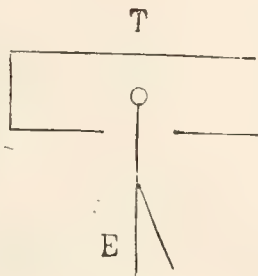
Siccome la rete e la carta sono quasi completamente trasparenti agl' X, così il ritardo della scarica di E, prodotto dal tubo di rete o di carta, non può attribuirsi alla loro opacità pei raggi flessi, o comunque diffusi, dietro lo schermo *l*; può bensì ritenersi come probabile, che il tubo di rete e, più ancora quello di carta, rallentino la scarica in quanto impediscano, più o meno completamente all' aria circostante attivata dagl' X, di pervenire all' elettroscopio e scaricarlo.

A confermare che nella scarica dei conduttori è l' aria circostante attivata dagl' X che vi prende la maggior parte, feci moltissime indagini, alcune delle quali già pubblicai [1] ed altre brevemente esporrò qui di seguito.

Fig. 2.

L' elettroscopio E fu esposto alla radiazione di un Crookes a pera, al modo consueto, e perdè 10° in 13 a 14″; indi fu coperto da un tubo di zinco T unito al suolo, e chiuso alla parte posteriore, fig. 2, e s'ebbe, in media, che

	E perdè	1°	2°	3°	4°	5°
	in	18″	34″	56″	1′20″	1′56″
Ossia:	E perde 1° in	18″	16″	22″	24″	36′

[1] V. Rendiconto, Accademia dei Lincei, 1896 a 1898.

La scarica fu oltremodo rallentata dal tubo (perdendosi 1° in una ventina di secondi), che pur dava libero accesso agl' X, ma impediva all'aria laterale ed attiva di pervenire all' elettroscopio.

Allontanai l' elettroscopio dal Crookes a 115 cm. ed interposi fra loro una grossa canna V di vetro (110 × 8,5 cm.) chiusa da un disco di piombo *dd*,

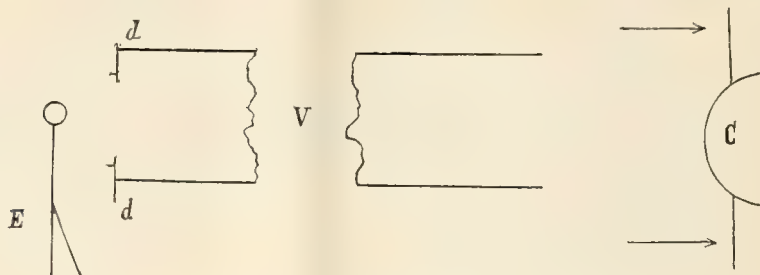



Fig. 3.

fig. 3, con un foro nel mezzo di 37 mm., che centrai con la pallina dell' elettroscopio E, di 20 mm. Dalle misure solite, che riassumo, risultò che

E perdè 3° in 2′52″

cioè E perdè 1° in 57″ circa.

Tolta la canna V e messo il tubo di zinco, come nel caso precedente, fig. 2, s' ebbe, in media che

E perdè 3° in 3′40″,

cioè 1° in 73″.

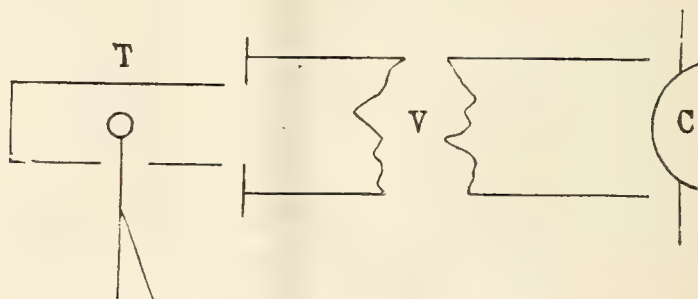



Fig. 4.

E finalmente adoperando il tubo T e la canna V insieme, disposte come nella fig. 4, e ripetute le misure si ebbe che

E perdè 3° in 4′16″

cioè 1° in 85″.

Questi diversi modi di sperimentare rallentano tutti più o meno la scarica di E, o con l' impedire all' aria circostante ed attivata di pervenire all' elettroscopio, o col sopprimere i raggi divergenti che attiverebbero l' aria circostante, o col sopprimere ambedue queste azioni.

Disposi un disco P, di piombo (13 cm. di diametro e dello spessore di 5 cm.) a 12 cm. da E, fig. 5, e vi feci agire il Crookes a circa 1 m.; la

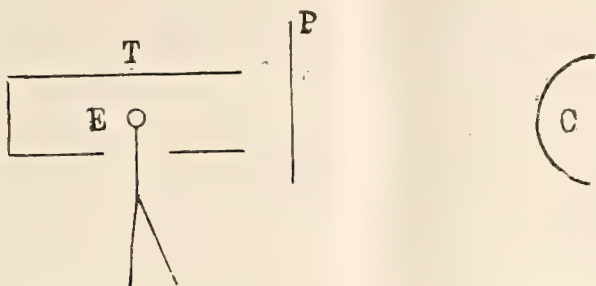



Fig. 5.

scarica fu rapidissima e quasi come senza disco, perdendosi 10° in 17″. Coperto E col solito tubo di zinco T, la scarica si rallentò oltre misura, perdendo E 1° in parecchi minuti primi; fenomeno che facilmente si comprende, dopo quanto si è detto.

II.

In seguito studiai l'effetto dei tubi fatti con diverse sostanze, ma i fenomeni essendo complicati da speciali azioni elettrostatiche, dirò prima brevemente di queste.

Adoperai il solito tubo di zinco T, fig. 2, tenuto isolato sul tappo di paraffina dell'elettroscopio. Le durate delle scariche di E prodotte dagl'X di C sono indicate qui sotto in due serie di misure successive, eseguite dopo di aver ricaricato ciascuna volta l'elettroscopio dall'interno.

Tabella I.

Elettroscopio E *con tubo di zinco isolato.*

I serie			II serie		
E perdè		E perdè 1°	E perdè		E perdè 1°
1°	in 2″,5	in 2″5	1°	in 45″	in 45″
2	6	3 5	2	1′30″	45
3	24	18	3	2 20	50
4	60	36	4	3 3	43
5	1′50″	50	5	3 48	45
6	2 40	50	6	4 47	59
7	3 27	47	7	5 25	38
8	4 22	55	8	6 15	50
9	5 12	50	9	6 53	38
10	6 2	50	10	7 33	40
		media 1° in 50″ (ultimi sei)			media 1° in 45″

Questi numeri mostrano che nella I serie di misure la scarica, rapida in principio, si rallentò fino alla quinta misura; indi divenne uniforme e fu in media, di 1° in 50″. Nella II serie la scarica fu uniforme fin da principio e fu in media, di 1° in 45″.

Analoghe misure furono fatte tenendo il tubo in comunicazione perfetta col suolo, e s'ebbero i dati seguenti:

Tabella II.

Elettroscopio E *con tubo di zinco unito al suolo.*

E perdè		E perdè 1°	
1°	in 39″	in 39″	media 1° in 42″
2	1′15″	36	
3	2 00	45	
4	2 38	38	
5	3 20	42	
6	4 3	43	
7	4 45	42	
8	5 30	45	
9	6 13	43	
10	6 55	42	

La scarica di E, col tubo unito al suolo fu, come nella II serie delle esperienze precedenti, costante fino dal suo inizio, perdendosi, in media, 1° in 42″. La differenza nell'andamento della scarica, o col tubo al suolo, come in queste ultime misure, o col tubo isolato, come nella I serie delle esperienze precedenti, è dovuta all'influenza. Quando il tubo di zinco T è isolato, esso prende e conserva, per l'induzione della carica di E, le due elettricità, come è indicato nella fig. 6. Sotto l'azione degl' X, la carica esterna di T si disperde rapidamente, e quella interna + dissimulerà meglio l'elettricità — di E, che sembrerà scaricarsi sollecitamente in sulle prime. Nel seguito ha luogo la scarica effettiva di E, che procederà lenta ed uniforme. Se invece il tubo T è unito al suolo, l'elettricità esterna — si sperde, e sotto l'azione degli X, avrà luogo la sola scarica effettiva ed uniforme di E, che si effettuerà lentamente fin da principio, come s'è visto nell'ultima tabella.

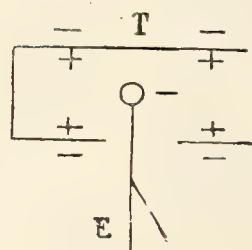



Fig. 6.

Fenomeni analoghi si hanno coi tubi coibenti di paraffina. In altre precedenti esperienze, avendo soprapposto ad E un tubo di paraffina, T, come

nella fig. 2, vidi che sotto l'azione degl' X la scarica dei primi 5° a 6° era rapida e poscia si rallentava. Ricaricato E dall'interno, senza toccare il tubo, ed esposte di nuovo alle radiazioni, la scarica rapida era di 2° a 3°; ed alla 5ª o 6ª esperienza la scarica rapida limitavasi a qualche grado solo; la scarica totale avveniva, in seguito, sempre in modo assai lento, per mezzo dell'aria attivata nel tubo dagli X. Se la paraffina erasi, per fusione, fatta aderire al gambo ed alla pallina dell'elettroscopio, si verificava, per l'azione degli X, la sola scarica iniziale rapida per le due o tre prime esperienze, e mancava la scarica lenta totale, per la mancanza di aria intorno alla pallina dell'elettroscopio.

Questi fenomeni, prima scoperti da me [1], furono, in seguito, osservati da lord Kelvin e descritti nel giornale inglese *Nature*, ma di essi non fu data alcuna spiegazione, che è quella stessa data pei tubi di zinco, come si vede da quanto segue.

Per estendere le esperienze ed istituire dei confronti, paragonai successivamente l'effetto del tubo di zinco precedente con uno di paraffina di eguale vano interno (16 × 3,5 cm.), che disposi sull'elettroscopio, in T, come nella fig. 2. Fatto agire gl' X su di E, caricato dall'interno, s'ebbero i dati che seguono:

E perdè	1°	2°	3°	4°	5°
in	8″	42″	2′5″	3′20″	4′30″
E perdè 1° in	8″	34″	1′23″	1′15″	1′10″

La scarica di E, col tubo di paraffina, fu rapida in principio, e si rallentò per divenir costante in seguito, come col tubo di zinco, e la spiegazione è la seguente, analoga alla precedente.

L'elettroscopio E, fig. 6, caricato in — attrarrà sull'esterno del tubo di paraffina elettricità +; la quale vi accorrerà rapidamente sotto l'azione degl' X, e dissimulerà la carica — di E, che sembrerà scaricarsi sollecitamente. Nel seguito la scarica di E sarà lenta e reale per mezzo dell'aria nel tubo attivata dagli X.

L'azione degl' X sul tubo di paraffina può sostituirsi con un'altra qualunque, che ceda all'esterno di esso la carica che richiama l'elettricità dello elettroscopio.

Difatti si carichi dall'interno l'elettroscopio in — e si faccia lambire con una fiamma a gas non isolata l'esterno del tubo di paraffina, esso acquisterà la carica + attratta, ed E discenderà subito di 5° a 6°: ripetendo l'esperienza, il tubo già carico, poco acquisterà dalla fiamma, ed E discenderà solo di qualche grado. Se dopo queste azioni s'espone l'elettro-

(1) E. Villari, *Sul modo col quale* ecc. Rendiconti Lincei, giugno 1896, Roma.

scopio col tubo alle radiazioni, la scarica sarà lenta ed uniforme fin da principio, come risulta dai numeri qui sotto:

	1°	2°	3°	4°	5°
E perde in	1′25″	3′00″	4′40″	6′00″	7′25″
E perde 1° in	1′25″	1′35″	1′40″	1′20″	1′25″

L'azione della fiamma sarà quindi simile a quella dei raggi X, avendo dato, come questi, all' esterno del tubo quella carica, che l'elettricità negativa di E vi richiamava.

Fenomeni identici si verificano caricando l' elettroscopio in $+$, invece che in $-$; ed impartendo, in un modo qualsiasi, con gl' X o con la fiamma, all' esterno del tubo di paraffina quella carica che vi è richiamata dall' elettricità dell' elettroscopio.

Quando l' elettroscopio era coperto dal blocco di paraffina, messovi a contatto per fusione, s' ebbe, dopo averlo caricato dall' interno e scaricata la paraffina con fiamma, che la scarica fu lentissima sino dal principio, come per la diffusione ordinaria, ed

E perdè	$\frac{1}{3}°$	$\frac{1}{2}°$	1°
in	1′20″	2′35″	11′

Risultati, questi, analoghi ai precedenti ottenuti col tubo di paraffina.

Dopo avere eseguite le misure col tubo di zinco unito al suolo, e riportate nella tabella II, ripetei subito, e nelle stesse condizioni, le misure col tubo di paraffina eguale, stato scaricato con la fiamma, ed ottenni i valori seguenti:

Tabella III.

Elettroscopio E *con tubo di paraffina.*

	I serie.		II serie.	
Scariche di	Durata	E perde 1°	Durata	E perde 1°
1°	1′35″	in 1′35″	53″	in 53″
2	2 44	1′5	1′45″	52
3	3 48	1′4	2 35	50
4	4 40	52	3 16	41
5	5 38	58	4 00	44
6	6 32	54	4 45	45
7	7 20	48	5 25	40
8	8 14	44	6 9	44
9	8 55 [1]	41	6 47	43
10	9 48	41	7 28	41
		media 48″		media 43″
			Medie . . .	00

[1] Questo valore fu ottenuto per interpolazione.

La durata media della scarica di 1°, a parte le piccole divergenze nel principio delle misure, è di 48″ nella I serie e di 43″ nella II, valore questo, presso a poco identico a quello di 42″, ottenuto per la scarica di 1° con l' E coperto dal tubo di zinco. Onde s' arguisce che l'effetto dei tubi non dipende dalla conducibilità elettrica o trasparenza loro pei raggi X. Ciò che era da prevedersi, dopo la spiegazione data sul loro modo di agire.

Non pertanto da alcune misure mi avvidi, che il tubo di carta aveva una azione specifica. Per bene osservare l' influenza della sostanza dei tubi ne costruii quattro eguali (16 × 3,5 cm.), chiusi ad un estremo, di zinco, di zinco coperto di grosso strato di paraffina, di paraffina e di carta. Tali tubi situai sull' elettroscopio, come è indicato nella fig. 2 ed eseguii le esperienze al modo solito, caricando E dall' interno e scaricando sempre il tubo, prima di incominciar le misure; le quali, più volte ripetute, dettero le medie seguenti:

Esperienze.

Col tubo di zinco:

E — perdè	1°	2°	3°
in	41″	1′54″	3′22″
E perdè 1° in	41	1 13	1 28

Col tubo di paraffina:

E — perdè	1°	2°	3°
in	1′13″	2′26″	3′25″
E perdè 1° in	1 13	1 13	59

Col tubo di carta:

E — perdè	1°	2°	3°
in	1′5″	5′35″	11′5″
E perdè 1° in	1 5	4 30	5 30

Col tubo di zinco paraffinato:

E — perdè	1°	2°	3°
in	1′18″	2′58″	4′29″
E perdè 1° in	1 18	1 40	1 36

I tubi di zinco semplice o paraffinato, e quello di paraffina ritardano la scarica dell' elettroscopio, che ricoprono, pressochè egualmente, perdendo esso 1° in circa un minuto e mezzo. Il tubo di carta, invece, ritarda molto di più la scarica, producendosi quella di 1° in oltre 5 minuti primi, a parte le solite irregolarità, che si verificano nel principio delle scariche.

Per confermare questa azione della carta costruii due tubi, uno di zinco e l' altro di carta, lunghi 322 cm. e di 3,5 cm. di diametro: e per essi spin-

gevo, contro di E, una corrente costante di aria o gas luce Xata in apposito recipiente. Le ripetute esperienze mostrarono, che il tubo di carta scemava un poco più di quello di zinco, la virtù scaricatrice del gas, ma le differenze non furono molto notevoli.

Di poi ripresi il tubo di zinco (16 × 3,5 cm.), aperto ad entrambi gli estremi, ed una volta lo rivestii internamente di carta da scrivere, piuttosto grossa e bene aderente, ed un' altra volta lo rivestii all' interno con una foglia sottile di zinco onde avere sempre tubi di egual diametro interno. Adattai successivamente cotesti tubi su di E, come nella fig. 2, e sperimentando col Crookes come di consueto, ottenni i valori che seguono:

I. Col tubo di zinco, rivestito all' interno di carta e stato scaricato durante la carica di E

E perdè	1°	2°	3°	4°
in	2'23"	5'10"	8'15"	11"25
E perdè 1° in	2 23	2 47	3 5	3 10

La scarica fu un poco più rapida in principio, come di solito, indi divenne quasi costante, perdendosi 1° in 3 primi, ad un dipresso.

II. Col tubo di zinco rivestito all' interno con lastra di zinco bene aderente:

E perdè	1°	2°	3°	4°
in	43"	1'30"	2'17"	3'06"
E perdè 1° in	43	47	47	49 (1).

La scarica, in questo caso, fu costante e durò circa 45" per 1°: ossia col tubo di zinco, soppannato di carta, la scarica durò circa un tempo quadruplo, che col tubo rivestito di zinco.

In queste misure i tubi si situarono sempre nell' identica posizione; e fu necessario sperimentare con tubi di eguale diametro interno, e quindi rivestire quello di zinco con altra foglia di zinco, per aver sempre lo stesso volume di aria efficace intorno alla pallina dell'elettroscopio, giacchè, come altra volta si è visto, i tubi ristretti ritardano la scarica, a parità di condizioni, più dei larghi.

La medesima azione specifica ha la carta sul gas luce ixato. Chiusi il tubo di zinco, soppannato di carta o di zinco, alla estremità posteriore con un tappo e vi spinsi per un tubo di vetro una corrente costante di gas luce, mentre il tubo era rivolto al Crookes attivo (fig. 2). I risultati delle consuete misure furono i seguenti:

(1) Il tubo fu certamente scaricato prima d'eseguire le misure sebbene tale indicazione non trovisi registrata nel mio giornale.

I. Col tubo soppannato di zinco:

E perdè	1°	2°	3°	4°
in	30″	1′12″	1′55″	2′40″
E perdè 1° in	30	42	43	45

II. Col tubo soppannato di carta :

E perdè	1°	2°	3°	4°	5°
in	1′19″	3′17″	5′23″	7′37″	9′40″
E perdè 1° in	1,19	1,58	2,06	2,14	2,03

Col tubo rivestito di zinco l'elettroscopio perdè 1° in circa 43″; con quello rivestito di carta perdè 1° in circa 130″, cioè in un tempo triplo. Il tubo di carta, adunque, ha la proprietà di scemare la virtù scaricatrice indotta nel gas luce molto di più che non l'abbia il tubo di zinco.

La trasparenza della carta è perfetta, tanto che la direzione con la quale i raggi X penetrano nel tubo non ha alcuna influenza sul ritardo della scarica prodotta da esso. Presi il solito tubo di carta (16 × 3,5 cm.) aperto ai due estremi e lo disposi su di E così, che le radiazioni lo percorrevano dall'un capo all'altro. L'E perdè 1° in circa 3′10″. Indi situai il tubo così che i raggi lo investissero normalmente, attraversandone le pareti; e, del pari, E perdè 1° in circa 3′. Quindi risulta che nei due modi la scarica ha, ad un dipresso la medesima durata, qualunque sia la direzione con la quale i raggi colpiscano il tubo di carta, che apparisce, perciò, di trasparenza perfetta.

Riassunto. — La scarica d'un elettroscopio, per l'azione dei raggi X è dovuta all'aria da essi attivata. Un E (elettroscopio) nell'ombra piena degl'X si scarica per l'aria circostante, che, da questi attivata, subito si diffonde nell'ombra. Perciò interponendo fra l'E ed il Crookes (C), una canna di vetro o di zinco, che sopprime i raggi laterali divergenti, la scarica si rallenta molto: e del pari si rallenta sovrapponendo alla pallina di E un tubo qualunque, che rivolto agl' X impedisca all'aria laterale attivata di raggiungerlo: e più lo rallenta un tubo ristretto perchè meno aria contiene che possa venire attivata.

Quando la pallina di E, insieme ad un coperchio sottile d'alluminio o di carta, che ben la chiude, vengono situati nell'ombra piena dei raggi, l'E si scarica per la loro azione, che quasi, flessi o comunque diffusi, pare penetrino nel coperchio, che pur trovasi nell'ombra. Sostituendo un coperchio eguale di piombo spesso, cessa affatto la scarica.

Coprendo E carico con un tubo di zinco isolato, questo, per influenza, prende all'interno elettricità contraria, ed all'esterno omologa. Esposto agli X in modo che i raggi penetrino nel tubo, essi lo scaricano subito dell'elettricità omologa esterna, ed E, per maggiore influenza della carica interna del

tubo, s'abbassa di pochi gradi, quasi si scaricasse: indi segue una scarica lenta, effettiva ed uniforme di E, per l'aria nel tubo, attivata dagl' X. Il primo abbassarsi di E può provocarsi scaricando l' elettricità esterna del tubo col dito o con una fiamma. Analogamente accade col tubo di paraffina. Questo sotto l'azione degl' X od anche della fiamma, prende all'esterno l'elettricità contraria, che è attratta da quella dell' E, la cui deviazione per influenza diminuisce subito di alcuni gradi; di poi segue la scarica lenta uniforme e reale, per l'aria nel tubo, attivata dagl' X. Se manca cotesta aria, come nel caso d' un blocco di paraffina colato sul bottone e gambo di E, mancherà la scarica lenta ed effettiva, e s' avrà la sola rapida iniziale, per l'azione degli X od anche della fiamma strisciata all' esterno della paraffina.

Questi fenomeni dei tubi e blocchi di paraffina involgenti l' E furono, già, è tempo, descritti da me ([1]). Di poi furono osservati dal Kelvin e descritti nel giornale inglese *Nature* ma non interpretati. Le precedenti esperienze li chiariscono completamente.

Fisica. — *Su una Nota del prof. de Heen dell' Università di Liegi dal titolo « Quelques observations sur les radiations infraélectriques et sur les expériences de M. E. Villari »* ([2]). Nota del Socio Emilio Villari.

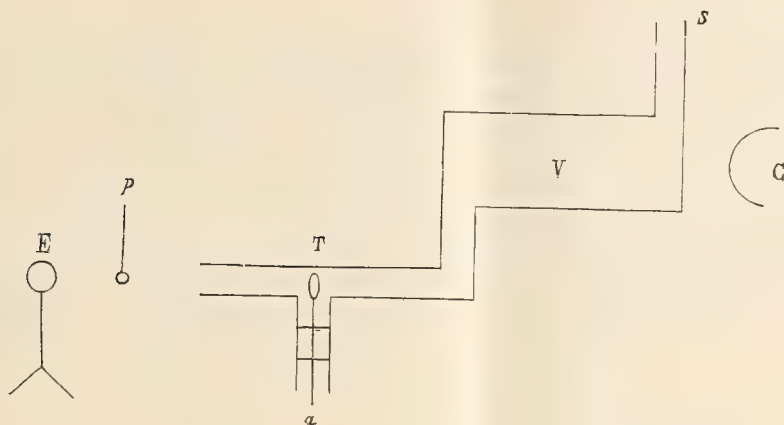
In un mio lavoro presentato all' Acc. dei Lincei ([3]) dimostrai che l' aria attivata dagli X (ixata), spinta per un tubo sopra una pallina o filo metallico elettrizzato, vi perde la virtù di scaricare un elettroscopio con elettricità omologa al filo; e spinta su due fili con cariche opposte vi perde ogni virtù scaricatrice, così da sembrare, dopo, aria ordinaria. Per questi ed altri simili fatti conclusi, che l' aria ixata si comporta COME SE le sue diverse particelle avessero cariche eguali ed opposte; delle quali neutralizzandone una, l' aria non può disperdere che una sola elettricità (la contraria a quella neutralizzata); e neutralizzandole entrambi, l' aria si comporta come aria ordinaria.

Il prof. de Heen in un recente lavoro, che ha avuto la cortesia di inviarmi, s' occupa di queste mie ricerche. Egli, però, non ripete l' esperienza qui sopra accennata, e ne esegue un' altra, che crede nuova, ma che fu già prima eseguita da me, e che certamente il prof. de Heen non ha conosciuta, e che trovasi descritta alla pag. 350 del citato mio lavoro.

([1]) Villari, Rend. Lincei, giugno 1896.

([2]) Extrait des Bull. de l' Accad. roy. de Belgique, 3e sér., t. XXV, n. 6, pp. 784-798, 1898.

([3]) *Dell' azione dell' elettricità* ecc. Rend. Accad. d. Lincei, giugno 1897, p. 343.

Ecco, in breve, questa mia esperienza ripetuta dal prof. de Heen. In un vaso cilindrico di piombo V (25 × 12 cm.), a grosse pareti, l' aria era attivata da un Crookes C a pera attraverso una delle basi di sottile foglia di alluminio; indi con una soffieria veniva spinta, con pressione costante, da *s*

pel tubo di ottone T, contro l' elettroscopio E. In T vi era un anello, che pel suo gambo *a* potevasi unire al suolo o caricare con una pila a secco. Le cose erano disposte in modo da evitare su di E ogni azione diretta degl' X, e qualsiasi induzione perturbatrice (1).

Sperimentando coll' anello *a* unito al suolo, e per ciò a 0°, l' aria ixata spinta per *s* scaricava rapidamente E comunque elettrizzato. Con l' anello elettrizzato in + od in —, l' aria ixata perdeva nel tubo T ogni virtù scaricatrice, in modo da agire come aria non ixata. Questi miei risultati furono confermati, per intiero dal de Heen col suo apparecchio, onde egli si credette in diritto di potere affermare « que l' aire infra-électrisé (ixata) perd de sa « proprieté de décharger les conducteurs, lorsqu'il à préalablement passé sur « un conducteur chargé d' un signe qualconque ». E poco dopo aggiunge « L'observation de M. E. Villari est, SANS AUCUN DOUTE, le résultat d'un « trasport d'air électrisé de la sphère à l'électroscope ecc. ».

Questa interpretazione di un trasporto di elettricità, data dal prof. de Heen, per spiegare il fatto scoperto da me e confermato da lui, venne, in principio, in mente anche a me (2), ma non mi parve reggesse ad una sana critica. In primo luogo non si comprende, nè il prof. de Heen lo spiega, perchè l' elettricità debba

(1) Nell'apparato del de Heen l'aria era ixata da un focus, attraverso un foglio di cartone, in un ampio tubo di piombo curvo, d' onde, con un mantice, veniva spinta contro l' elettroscopio contenuto in una cassa di piombo unita al tubo: ed in questo, invece dell' anello *a* della figura, trovavasi un disco di rame isolato, che il de Heen caricava con una macchina Holtz.

(2) Villari, l. c., pag. 353.

nella mia esperienza, essere trasportata all' elettroscopio dalla pallina p debolmente caricata con la pila a secco, e non debba essere trasportata dal dischetto a, che il prof. de Heen caricava, al certo, assai più con una macchina di Holtz. Ed in secondo luogo, come dirò in una prossima Nota, a me non riescì di caricare l' aria, facendo uso dell' *aigrette* di una piccola macchina del Voss; e neanche riuscì, per quanto ricordo, al prof. Warburg.

Dall' altro canto la mia esperienza, eseguita dopo dal de Heen, è meno semplice, che non paia. Come già feci notare ([1]), l' anello o disco a elettrizzato, risveglia sulla superficie interna del tubo metallico una carica opposta. Perciò l'aria ixata, spinta fra l'anello od il disco ed il tubo, passa su due cariche opposte e non già sopra una soltanto, come opina il prof. de Heen. Quindi da questa esperienza non può ammettersi col nominato professore, che l'aria ixata perde ogni sua virtù scaricatrice, passando sopra UN CONDUTTORE comunque carico ([2]): ed a me parve più prudente, fino a nuove esperienze, di limitarmi a dire, che l'aria ixata SI COMPORTA COME SE FOSSE DOTATA delle due cariche opposte, che possono venire annullate dalle due opposte elettricità.

Un identico fenomeno si verifica, ed una identica interpretazione può invocarsi, pel caso studiato da me, dell' aria ixata, la quale passando per un ozonatore in attività, o stato di recente attivato, vi perde ogni sua virtù scaricatrice, per le due cariche opposte che esso presenta. Anzi aggiungerò, che fu in vista della induzione nel tubo metallico, che complica il fenomeno, e che non si è sicuri di evitare del tutto neanche con un tubo coibente, che io mi ridussi a far passare l' aria ixata sulla pallina esterna elettrizzata p, per essere sicuro di operare con una sola elettricità: e soltanto così riuscii a ridurre l' aria ixata in condizioni da fare scaricare una sola delle due elettricità ([3]).

In conclusione può dirsi, che l' idea del trasporto delle cariche, che in sulle prime viene in mente a chiunque, e che è sostenuto dal de Heen per ispiegare i fenomeni studiati da me, non può, parmi, oggi sostenersi con ragione. Circa l' ipotesi della duplice carica delle particelle dell' aria, dirò che essa mi guidò a scoprire i varî fatti da me studiati, e mi agevolò a descriverli, onde io la invocai per semplice comodo, e con le più ampie riserve. Tali fenomeni hanno bisogno d' ulteriori investigazioni per esser meglio compresi, e di esse al presente mi occupo.

([1]) Villari, l. c., pp. 350 e 351.

([2]) Vedi più sopra le parole del de Heen riportate in francese.

([3]) Id., p. 347, tabella III.

Matematica. — *Sui sistemi di ipersuperficie di* S_r *aventi le stesse prime polari*. Nota 2ª del Corrispondente E. Bertini.

17. Per il caso di $r=3$ seguiremo il metodo esposto nella Nota 1ª (n. 16) Se l'omografia che si considera ha quattro punti uniti (distinti o successivi) le $\varphi=0$ soddisfacenti alle (5) cioè aventi le quadriche apolari (7) sono le V^n_{r-1} di un sistema $\mathcal{A}$. Negli altri casi formano più sistemi $\mathcal{A}$, uno qualunque dei quali si ottiene nel modo ivi detto. Per i 13 casi che sono da considerare si usano l'indicazione e le formole delle rispettive omografie date da Predella nella già citata Memoria [1]. Le formole sono tutte comprese in questo tipo:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
y_1 &= az_1 + \lambda z_2 + \mu z_3 + \nu z_4\\
y_2 &= \;.\qquad bz_2 + \varrho z_3 + \sigma z_4\\
y_3 &= \;.\qquad\;.\qquad cz_3 + \tau z_4\\
y_4 &= \;.\qquad\;.\qquad\;.\qquad dz_4
\end{aligned}
$$

e quindi le (5), a cui si deve soddisfare, si riducono alle

$$
(9)\quad
\begin{cases}
(a-b)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}-\lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=0\\[2mm]
(a-c)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3}-\mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-\varrho\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}=0\\[2mm]
(a-d)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_4}-\nu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-\sigma\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}-\tau\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3}=0\\[2mm]
(b-c)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_3}+\lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3}-\mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}-\varrho\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=0\\[2mm]
(b-d)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_4}+\lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_4}-\nu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}-\sigma\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}-\tau\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_3}=0\\[2mm]
(c-d)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\,\partial x_4}+\mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_4}+\varrho\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_4}-\nu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3}-\sigma\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_3}-\tau\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}=0\,.
\end{cases}
$$

18. 1° Caso: [0000]: $\lambda=\mu=\nu=\varrho=\sigma=\tau=0$. Si ha il sistema $\mathcal{A}$, di superficie

$$\theta_1 x_1{}^n+\theta_2 x_2{}^n+\theta_3 x_3{}^n+\theta_4 x_4{}^n=0\,,$$

i parametri essendo $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$: le quadriche apolari sono le

$$\alpha_{12}\xi_1\xi_2+\alpha_{13}\xi_1\xi_3+\alpha_{14}\xi_1\xi_4+\alpha_{23}\xi_2\xi_3+\alpha_{24}\xi_2\xi_4+\alpha_{34}\xi_2\xi_4=0$$

inscritte nel tetraedro fondamentale.

[1] § 9 (33).

2° Caso: [(00)00]: $a=b$, $\mu=\nu=\varrho=\sigma=\tau=0$. Si ha il sistema $\mathcal{A}$ (di monoidi)

$$\theta_1 x_1 x_2^{n-1} + \theta_2 x_2^n + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x^n_4 = 0 :$$

le quadriche apolari sono

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

aventi tre piani comuni $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ e nel primo di essi il punto di contatto sopra una retta $x_1=x_2=0$, cioè aventi quattro piani comuni, di cui due successivi.

3° Caso: [(00)(00)]: $a=c$, $b=d$, $\lambda=\nu=\varrho=\tau=0$. Il sistema $\mathcal{A}$ (di superficie con retta $(n-1)^{pla}$) è

$$\theta_1 x_1 x_3^n + \theta_2 x_2 x_4^{n-1} + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x_4^n = 0 ;$$

a cui sono apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0 ,$$

aventi comuni due piani $x_3=0$, $x_4=0$ e in ciascuno il punto di contatto sopra una retta ($x_1=x_3=0$, $x_2=x_4=0$), cioè aventi quattro piani comuni due a due successivi.

4° Caso: [(000)0]: $a=b=c$, $\mu=\nu=\sigma=\tau=0$. Il sistema $\mathcal{A}$ (di monoidi) è

$$\theta_1(\mathrm{A}x_1x_3^{n-1} + \mathrm{B}x_2^2x_3^{n-2}) + \theta_2 x_2 x_3^{n-1} + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x_4^n = 0 ,$$

essendo A, B arbitrarie ma fisse (e precisamente, in funzione dei coefficienti dell'omografia presa: $\mathrm{A}=2\varrho$, $\mathrm{B}=(n-1)\lambda$). Le quadriche apolari sono

$$\alpha_{11}\xi^2{}_1 + \alpha_{22}\xi^2{}_2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

ove $\lambda\alpha_{22} + \varrho\alpha_{13} + 0$, cioè $\dfrac{\alpha_{22}}{\alpha_{13}} = \text{cost}.$ Tali quadriche hanno quindi due piani comuni $x_3=0$, $x_4=0$, toccano $x_3=0$ sopra una retta $x_2=x_3=0$ ed hanno i coni circoscritti da un punto $x_1=x_2=x_3=0$ non solo tangenti ma osculantisi lungo detta retta, cioè hanno quattro piani comuni, di cui tre successivi.

5° Caso: [(0000)]: $a=b=c=d$, $\mu=\nu=\sigma=0$. Il sistema $\mathcal{A}$ (di superficie composte di un piano contato $n-3$ volte e di superficie gobbe di 3° grado di Cayley aventi questo piano per piano stazionario) è

$$x_4^{n-3}\,[\theta_1(\mathrm{A}x_1x^2{}_4 + \mathrm{B}x_2x_3x_4 + \mathrm{C}x^3{}_3) +$$
$$+ \theta_2(\mathrm{D}x_2x_4^{n-1} + \mathrm{E}x^2{}_3x_4) + \theta_3x_3x^2{}_4 + \theta_4x^3{}_4] = 0$$

essendo A, B, C, D, E fisse e soddisfacenti alle due relazioni $\mathrm{A}=\mathrm{D}^2$, $\mathrm{CD}=\mathrm{BE}$ (in funzione dei coefficienti dell'omografia data: $\mathrm{A}=4\tau^2$,

$B = 6(n-1)(n-2)\tau\lambda$, $C = 3(n-1)^2(n-2)\varrho\lambda$, $D = 2\tau$, $E = \varrho(n-1)$).
A questo sistema sono apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 = 0$$

ove $\lambda\alpha_{23} + \tau\alpha_{14} = 0$, $\varrho\alpha_{33} + \tau\alpha_{24} = 0$ (ossia $\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{14}} = \text{cost.}$, $\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{24}} = \text{cost.}$): le quali quadriche hanno quattro piani comuni successivi (in $x_4 = 0$) sulla sviluppabile di 3ª classe definita dalle

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \varrho^2\theta^3 : \varrho\lambda\theta^2 : \varrho\lambda\theta : \tau\lambda\,,$$

poichè, sostituendo queste espressioni parametriche in θ nell'equazione precedente, si stacca il fattore θ^4.

I cinque sistemi A trovati *sono ∞^3 e sono caratterizzati dall'ammettere ∞^5 quadriche apolari, cioè le quadriche tangenti a quattro piani distinti o successivi.*

Facendo sopra una *determinata* superficie del sistema, per ciascuno dei detti cinque casi, una trasformazione omografica della specie relativa al caso stesso, si verifica immediatamente che si ritorna al sistema primitivo.

19. In ciascuno dei quattro casi che seguono si trovano, in conformità ai teoremi generali della Nota 1ª, ∞^{n+2} superficie definite dall'ammettere ∞^4 quadriche apolari, cioè le quadriche aventi comuni (distinti o successivi) una retta (asse) e due piani. Ogni superficie appartiene poi ad un sistema A, ∞^2.

6° Caso: [100]: $a = b$, $\lambda = \mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Si hanno le superficie

$$u_n(x_1x_2) + \theta_1 x^n_3 + \theta_2 x^n_4 = 0, \tag{10}$$

i parametri essendo θ_1, θ_2 e i coefficienti di u_n, forma binaria qualsiasi di x_1, x_2, dell'ordine n: rispetto alle quali sono apolari le quadriche

$$\alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

passanti per una retta (asse) $x_1 = x_2 = 0$ e aventi comuni i due piani $x_4 = 0$, $x_3 = 0$. Eseguendo sopra una delle (10) una trasformazione omografica $y_1 = a'z_1$, $y_2 = a'z_2$, $y_3 = c'z_3$, $y_4 = d'z_4$ si ha l'equazione di un sistema A

$$\theta'_1 u_n(x_1x_2) + \theta'_2 x^n_3 + \theta'_3 x^n_4 = 0$$

i cui parametri sono θ'_1, θ'_2, θ'_3, mentre $u_n(x_1x_2)$ è qualsiasi ma determinata.

7° Caso: [(10)0]: $a = b = c$, $\mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Si hanno le superficie

$$u_n(x_2x_3) + \theta_1 x_1 x_2^{n-1} + \theta_2 x_4^n = 0\,, \tag{11}$$

i parametri essendo, come prima, θ_1, θ_2 e i coefficienti di u_n. Le quadriche apolari

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

hanno comune il piano $x_4 = 0$, passano per una retta (asse) $x_2 = x_3 = 0$ e fra i piani per questa retta uno, $x_2 = 0$, ha un dato punto di contatto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (caso limite del precedente). Eseguendo sopra una delle (11) una trasformazione

$$y_1 = a'z_1 + \lambda' z_2 \, , \, y_2 = a'z_2 \, , \, y_3 = a'z_3 \, , \, y_4 = d'z_4 \, ,$$

si trova un sistema A

$$\theta'_1[u_n(x_2x_3) + x_1x_2^{n-1}] + \theta'_2x_2^n + \theta'_3x_4^n = 0$$

ove u_n è fissa e i parametri sono θ'_1, θ'_2, θ'_3.

8° Caso: [1(00)]: $a = b$, $c = d$, $\mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Si hanno le superficie (monoidi)

$$u_n(x_3x_4) + \theta_1x_1x_2^{n-1} + \theta_2x_2^n = 0 \tag{12}$$

i parametri essendo pure θ_1, θ_2 e i cofficienti di u_n: rispetto a cui sono apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi^2_1 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 = 0$$

passanti per la retta (asse) $x_3 = x_4 = 0$ e aventi un piano comune $x_2 = 0$ col punto di contatto sopra una data retta $x_1 = x_2 = 0$ (pure caso limite del 6°). La trasformazione

$$y_1 = a'z_1 + \lambda'z_2 \, , \, y_2 = a'z_2 \, , \, y_3 = c'z_3 \, , \, y_4 = c'z_4$$

fatta sopra una delle (12) dà un sistema A

$$\theta'_1u_n(x_3x_4) + \theta'_2x_1x_2^{n-1} + \theta'_3x_2^n = 0$$

ove, al solito, u_n è qualunque ma fissa.

9° Caso: [(100)]: $a = b = c = d$, $\mu = \nu = \sigma = \tau = 0$. Le superficie (monoidi) sono

$$u_n(x_3x_4) + \theta_1(\mathrm{A}x_1x_3^{n-1} + \mathrm{B}x_2^2x_3^{n-2}) + \theta_2x_2x_3^{n-1} = 0 \tag{13}$$

in cui A, B sono costanti (in funzione dei coefficienti dell' omografia: $\mathrm{A} = 2\varrho$, $\mathrm{B} = (n-1)\lambda$) ed i parametri sono θ_1, θ_2 ed i coefficienti di u_n. Hanno per quadriche apolari le

$$\alpha_{11}\xi^2_1 + \alpha_{22}\xi^2_2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 = 0$$

colla condizione $\varrho\alpha_{13} + \lambda\alpha_{22} = 0$, cioè $\dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{22}} = \text{cost.}$; quadriche cioè che passano per una retta (asse) $x_3 = x_4 = 0$, che hanno fra i piani per questa

retta uno, $x_3=0$, con dato punto di contatto $x_2=x_3=x_4=0$ e tali infine che i coni circoscritti ad esse da un punto $x_1=x_2=x_3=0$ del piano $x_3=0$ non solo si toccano, ma si osculano lungo la $x_2=x_3=0$ (che è pure caso limite dei precedenti). Si faccia sopra una delle (13) una trasformazione

$$y_1=a'z_1+\lambda'z_2\,,\ y_2=a'z_2+\varrho'z_3\,,\ y_3=a'z_3\,,\ y_4=a'z_4$$

e si troverà un sistema $\mathcal{A}$ dato dalla

$$\theta'_1[u_n(x_3x_4)+A'x_1x_3^{n-1}+B'x_2^2x_3^{n-2}]+\theta'_2x_2x_3^{n-1}+\theta'_3x_3^n=0$$

ove i soli parametri sono $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$, gli altri coefficienti essendo arbitrarî ma fissi.

20. Nei due casi che seguono le superficie (apolari ad ∞^3 quadriche passanti per due rette (assi) distinte o successive) sono ∞^{2n+1} ed ogni superficie appartiene ad un sistema $\mathcal{A}$, ∞^1 (Cfr. Nota 1ª).

10° Caso: $[11]$: $a=b\,,c=d\,,\lambda=\mu=\nu=\varrho=\sigma=\tau=0$. Le superficie sono

$$u_n(x_1x_2)+v_n(x_3x_4)=0\,, \tag{14}$$

i cui parametri sono i coefficienti delle forme binarie u_n, v_n. Ad esse sono apolari le quadriche

$$\alpha_{13}\xi_1\xi_3+\alpha_{14}\xi_1\xi_4+\alpha_{23}\xi_2\xi_3+\alpha_{24}\xi_2\xi_4=0$$

passanti per due rette (assi) $x_1=x_2=0, x_3=x_4=0$. La trasformazione $y_1=az_1, y_2=az_2, y_3=cz_3, y_4=cz_4$ eseguita sopra una delle (14) dà un sistema $\mathcal{A}$

$$\theta'_1u_n(x_1x_2)+\theta'_2v_n(x_3x_4)=0\,,$$

ove u_n, v_n sono adesso qualsiansi ma determinate.

11° Caso: $[(11)]$: $a=b=c=d\,,\lambda=\nu=\varrho=\tau=0$. Le superficie (con retta $(n-1)^{\text{pla}}$) sono

$$x_1u_{n-1}(x_3x_4)+x_2v_{n-1}(x_3x_4)+w_n(x_3x_4)=0 \tag{15}$$

i parametri essendo i coefficienti delle forme binarie w_n, u_{n-1}, v_{n-1}, questi ultimi però vincolati dalla relazione identica

$$\mu\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_4}=\sigma\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_3}\,,$$

ossia

$$\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_3}:\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_4}=\text{cost.}: \tag{16}$$

onde la loro equazione può scriversi nella forma

$$\begin{aligned}\theta_0x_1x_3^{n-1}&+\theta_1[(n-1)\sigma x_1x_3^{n-2}x_4+\mu x_2x_3^{n-1}]\\&+\theta_2[(n-2)\sigma x_1x_3^{n-3}x_4^2+2\mu x_2x_3^{n-2}x_4)\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+\theta_{n-1}[\sigma x_1x_4^{n-1}+(n-1)\mu x_2x_3x_4^{n-2}]\\&+\theta_nx_2x_4^{n-1}+w_n(x_3x_4)=0\,.\end{aligned}$$

Hanno apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 = 0$$

colla condizione $\sigma\alpha_{14} + \mu\alpha_{23} = 0$, ovvero $\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{23}} = \text{cost.}$; quadriche adunque che si toccano nei punti di una retta $x_3 = x_4 = 0$ (caso limite del precedente). Fatta sopra una delle (15) la trasformazione $y_1 = a'z_1 + \mu'z_3$, $y_2 = a'z_2 + \sigma'z_4$, $y_3 = a'z_3$, $y_4 = a'z_4$ ove deve porsi $\frac{\mu'}{\sigma'} = \text{cost.}$ (per fissare la proiettività dei punti ai piani sulla retta $z_3 = z_4 = 0$, cioè per fissare le due rette fondamentali successive), si trova

$$\theta_1[x_1u_{n-1}(x_3x_4) + x_2v_{n-1}(x_3x_4) + w_n(x_3x_4)] + \\ + \theta_2(x_3u_{n-1} + x_4v_{n-1}) = 0$$

come equazione delle superficie di un sistema $\mathcal{A}$. In essa w_n è arbitrariamente data, mentre le u_{n-1}, v_{n-1}, pure date, debbono soddisfare alla relazione identica (16).

21. Nei due casi seguenti le superficie (apolari alle ∞^2 quadriche costituite da un punto fisso e da un punto variabile di un piano passante o no per il punto fisso) sono $\infty^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ e ogni superficie fa parte di un sistema $\mathcal{A}$, ∞^1 (Cfr. Nota 1ª).

12° Caso: [20]: $a = b = c$, $\lambda = \mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Le superficie sono

$$\theta x_4^n + u_n(x_1x_2x_3) = 0 \tag{17}$$

i parametri essendo θ e i coefficienti della forma ternaria u_n: superficie a cui sono apolari le quadriche

$$\alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

costituite dal punto $\xi_4 = 0$ e dai punti del piano $x_4 = 0$. Facendo sopra una delle (17) una trasformazione $y_1 = a'z_1$, $y_2 = a'z_2$, $y_3 = a'z_3$, $y_4 = d'z_4$, si ha un sistema $\mathcal{A}$

$$\theta'_1x_4^n + \theta'_2u_n(x_1x_2x_3) = 0$$

ove u_n è forma qualsiasi fissa.

13° Caso: [(20)]: $a = b = c = d$, $\mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Le superficie (monoidi) sono

$$\theta x_1x_2^{n-1} + u_n(x_1x_2x_3) = 0 \tag{18}$$

coi parametri θ e i coefficienti di u_n, ed hanno apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 = 0$$

costituite dal punto $\xi_1 = 0$ e dai punti del piano $x_2 = 0$ (caso limite del precedente). Colla trasformazione $y_1 = a'z_1 + \lambda'z_2$, $y_2 = a'z_2$, $y_3 = a'z_3$, $y_4 = a'z_4$ eseguita sopra una delle (18), si trova l'equazione

$$\theta_1' x_2^n + \theta'_2 u_n(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

ove u_n è qualsiasi ma determinata.

22. Il calcolo dei sistemi $\mathcal{A}$ si può fare o col metodo qui seguito, applicando cioè il teorema del n. 5 o col metodo (meno semplice) adottato nella Nota dell'Accad. di Torino, applicando cioè le identità (3).

L'esattezza dei risultati fu pure verificata per la seconda via, il che è utile osservare, specie per i casi limiti (Cfr. n. 15).

Si noti ancora che, mentre nei primi cinque casi si ha una semplice definizione geometrica, comune ad essi, dei sistemi $\mathcal{A}$ (n. 18), negli altri casi si sono trovate soltanto le equazioni di tali sistemi. Non è difficile però dare una interpretazione geometrica di queste equazioni in ogni singolo caso (e l'interpretazione si può fare in vario modo) analoga a quella data nella Nota suddetta. Ma, per ora, si tralascia di esporre cosifatte singole interpretazioni, talune sono ovvie, di cui mentre altre (specialmente quella del Caso 11°) si presentano in forma molto complessa [1].

Matematica. — *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

Il sig. Nöther [2] ha considerato le superficie algebriche che posseggono un *fascio* di curve razionali C, cioè una serie di curve razionali C dipendenti algebricamente da un parametro, tale che ogni punto generico appartenga ad *una* curva C. Egli ha dimostrato che « ogni superficie possedente

[1] In queste interpretazioni conviene introdurre la nozione di *punto d'iperosculazione,* cioè punto semplice di una superficie il cui piano tangente taglia in una linea con punto n^{uplo} nel punto di contatto, costituita quindi di n rette per il punto (condizione necessaria e sufficiente per ciò è che la prima polare del punto si spezzi nel piano tangente e in una superficie d'ordine $n-2$ non passante per il punto): e conviene anche considerare quel particolare punto d'iperosculazione, in cui le n rette, costituenti la sezione, formino un gruppo ciclico-projettivo.

[2] *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler curven besitzen,* Mathem. Annalen, Bd. 3.

un fascio di curve razionali C si può trasformare birazionalmente in una superficie possedente un fascio di coniche; quest' ultima superficie (e quindi la prima) si trasforma in una rigata se si può determinare una curva unisecante le coniche del fascio ». Ma l' esistenza di una siffatta curva unisecante viene stabilita soltanto se il genere p del fascio (considerato come ente algebrico ∞^1 che ha per elementi le C) è nullo, ossia se il fascio delle C è lineare. Resta dunque ancora insoluta la questione « se una superficie possedente un fascio irrazionale di curve razionali sia sempre riferibile ad una rigata (avente il genere p del fascio) ».

Tale questione viene qui risoluta affermativamente quando $p=1$ o $p=2$; viene dunque stabilito (con una concisa dimostrazione) il teorema:

Ogni superficie possedente un fascio ellittico o di genere due di curve razionali si può riferire ad una rigata (risp. ellittica o di genere due).

L' estensione del teorema per $p>2$ formerà oggetto di una Nota ulteriore.

1. Sia F una superficie possedente un fascio di genere p di coniche. Possiamo supporre che essa appartenga ad uno spazio S_n, dove n è grande quanto si vuole, e che le nominate coniche C di essa stieno in piani π non intersecanti ulteriormente la superficie. Si scelga una qualsiasi curva χ unisecante i piani π, e si proietti ogni conica C dal punto della χ che appartiene al suo piano, in un S_{n-1} fissato.

La superficie F viene così rappresentata sopra una rigata doppia φ di S_{n-1}, la curva di diramazione sopra φ è costituita da una curva K bisecante le generatrici, ed eventualmente anche da un certo numero ϱ di generatrici $a_1 \dots a_\varrho$. Queste debbon esser tangenti a K (o incontrare K in punti doppî) perchè ogni generatrice di ϱ che non tocchi K è proiezione doppia di una conica C irriducibile.

Supponiamo per semplicità che i ϱ punti di contatto non sieno doppî per K. Accenneremo poi alle modificazioni da introdurre nei ragionamenti successivi, quando valga l' ipotesi opposta.

Vogliamo costruire su φ una curva L, unisecante le generatrici, la quale passi per i punti di contatto $A_1 \dots A_\varrho$ della K con $a_1 \dots a_\varrho$, e tocchi la K stessa negli ulteriori punti d' incontro.

Si scelga sopra φ un sistema lineare di curve θ unisecanti le generatrici e privo di punti base. La dimensione r del sistema (completo) delle θ potrà supporsi grande ad arbitrio, giacchè il sistema stesso può sempre essere ampliato sommando alle curve primitive un certo numero di generatrici di φ (¹).

Mediante il sistema scelto delle θ, si trasformi la rigata φ in modo che le dette θ vengano segate dagli iperpiani di un S_r; si avrà una ri-

(¹) Cfr. Segre, *Courbes et surfaces réglées algébriques*, II. Mathem. Annalen, Bd. 34.

gata φ' di S_r, sulla quale la curva K e le generatrici tangenti $a_1 \dots a_\rho$ di φ avranno come corrispondenti risp. una curva K' e ϱ generatrici tangenti $a'_1 \dots a'_\rho$.

La curva K' può supporsi una curva normale dello spazio S_r, altrimenti la rigata doppia φ' potrebbe riguardarsi come proiezione di un' altra rigata doppia di S_{r+1} avente lo stesso numero di generatrici di diramazione ([1]), e si potrebbero riferire i ragionamenti che seguono a questa seconda rigata invece che a φ'. Ora, indicato con P il genere di K' (o di K), l' ordine di K' (supposto $r > P$), sarà

$$m = r + P.$$

Questo ordine m avrà la stessa parità o disparità di ϱ poichè la curva $K' + a'_1 + \dots + a'_\rho$ costituisce la intera curva di diramazione della rigata doppia φ', e quindi $m + \varrho$ è pari.

Si considerino gli iperpiani passanti per i ϱ punti di contatto di $a'_1 \dots a'_\rho$ con K', essi formano un sistema lineare la cui dimensione è (almeno) $r - \varrho$. Questi iperpiani incontrano ulteriormente K' in $m - \varrho$ punti.

La determinazione degli iperpiani del detto sistema che toccano K' in $\frac{m-\varrho}{2}$ punti (cioè che toccano K' in tutti i punti d' incontro cadenti fuori di quelli fissati) si può far dipendere, come è noto, da un problema di bisezione delle funzioni abeliane inerenti a K'. Questo problema ammette certo soluzioni se

$$r - \varrho \geq \frac{m-\varrho}{2}$$

ossia se si è preso

$$r \geq P + \varrho.$$

Ora (supposto appunto di aver preso $r \geq P + \varrho$) gli iperpiani di S_r che soddisfano alle condizioni richieste segano su φ' delle curve L', cui corrispondono sopra φ le curve L domandate. Infatti le L, unisecanti le generatrici di φ passano pei ϱ punti di contatto di K con $a_1 \dots a_\rho$, e toccano ulteriormente la K stessa ovunque la incontrano.

2. Ritorniamo alla superficie F, contenente un fascio di coniche C, che avevamo rappresentato sulla rigata doppia φ. Alle curve L di φ corrispondono sopra F certe curve λ, bisecanti le coniche C del fascio, che hanno il genere minimo fra tutte le bisecanti possibili. Avendo indicato con p il genere del fascio di coniche (che è il genere della rigata doppia φ) il genere delle λ, valutato secondo la formula di corrispondenza di Zeuthen sarà

$$2p - 1.$$

([1]) Per la costruzione di tale rigata cfr. Segre, l. c., pag. 4 (**).

Le λ possono eventualmente essere spezzate in due curve unisecanti le C. È ciò che avviene sempre quando $p = 0$ [1]. La presenza di una siffatta λ spezzata basta a riferire punto per punto la superficie F ad una rigata di genere p. Ci metteremo dunque nel caso più sfavorevole, supponendo di aver ottenuto una curva λ irriducibile ($p > 0$).

La costruzione di una λ di genere $2p - 1$ su F è stata fatta nell' ipotesi che sulla rigata doppia φ le generatrici $a_1 \dots a_\rho$ toccassero K in punti semplici. Nell' ipotesi opposta si riesce ugualmente allo scopo introducendo una leggiera modificazione: non basta più che le curve L passino per quei ϱ punti, ma per ciascun punto doppio si esige un contatto della L con K tale che il numero delle intersezioni di L e K assorbite in quel punto, risulti dispari.

3. Rappresentiamo nuovamente la superficie F sopra una rigata doppia scegliendo però la curva χ del n. 1, non più ad arbitrio, ma in modo che la proiezione di λ sia la curva di diramazione della rigata. Basta perciò determinare la χ come luogo dei poli delle corde delle coniche C che congiungono le intersezioni di λ colle dette C.

Si indichi con Φ la rigata doppia così ottenuta, e con λ' la sua curva di diramazione omologa a λ, alla quale eventualmente dovranno sommarsi alcune generatrici di Φ.

Procedendo come innanzi (coll' avvertenza che un punto comune a λ' e ad una generatrice di Φ è sempre un punto doppio) costruiremo su Φ una curva unisecante le generatrici e tangente alla curva di diramazione in ogni punto d' incontro. A questa curva corrisponderà sopra F una curva σ (eventualmente spezzata) di genere $2p - 1$. La curva σ, come la λ, biseca, le coniche C; inoltre sopra ogni conica C le due coppie segate da λ e da σ si separano armonicamente. Possiamo esprimere questa relazione dicendo che λ e σ sono due *bisecanti armoniche delle coniche* C.

4. Supponiamo ora $p = 1$. Come nel caso generale si ottengono sopra la superficie F due bisecanti armoniche delle coniche C, aventi il genere minimo $2p - 1$; in questo caso ciascuna di tali bisecanti è ellittica o si spezza in due unisecanti. Prendiamo in esame l' ipotesi più sfavorevole, in cui le due bisecanti λ e σ sieno irriducibili.

Possiamo costruire su F un fascio razionale costituito da coppie di coniche C, scegliendo una g'_2 nell' ente ellittico ∞^1 che ha per elementi le C.

Ora ci proponiamo di costruire su F una involuzione (di coppie di punti) che trasformi ogni C nella coniugata, accoppiando dunque le C nel modo detto innanzi.

Si prendano in un modo particolare due C coniugate: sieno C_1 e C_2. Indichiamo con $A_1 A'_1$ e $B_1 B'_1$ le coppie di punti segate su C_1 risp. da λ

[1] E così appunto si può riferire la F ad un piano. Cfr. il n° 9 del mio lavoro *Sulle irrazionalità...* Mathem. Annalen — Bd. 49.

e da σ; e indichiamo similmente con $A_2 A'_2$ e $B_2 B'_2$ le coppie segate da λ e da σ su C_2.

Facciamo corrispondere sulla curva ellittica λ i punti $A_1 A_2$ (oppure $A_1 A'_2$); otteniamo una involuzione razionale g'_2; questa g'_2 è notoriamente permutabile colla involuzione ellittica γ'_2 e perciò contiene pure la coppia $A'_1 A'_2$ (o risp. $A'_1 A_2$). Ora se si prendono due altre C coniugate, generiche, i due punti in cui l'una di esse è segata da λ corrispondono ai due punti di sezione dell'altra in un modo che è razionalmente determinato, appena sia fissata su λ la nominata g'_2 (la scelta di questa g'_2 dipende da un'irrazionalità quadratica puramente *aritmetica*).

Associando i punti $B_1 B_2$, $B'_1 B'_2$ della curva ellittica σ, otterremo del pari sopra di essa una involuzione razionale g'_2 permutabile coll'involuzione γ'_2 segata dalle C, e mediante una tale g'_2 risulterà fissato razionalmente un riferimento ordinato delle due coppie di punti segate da σ sopra due C coniugate.

Ciò posto, date due C coniugate generiche, ai quattro punti in cui l'una di esse è segata da λ e da σ si possono far corrispondere ordinatamente i quattro punti d'incontro dell'altra colle stesse due curve, e poichè le due quaterne di punti sono armoniche, e si corrispondono in esse le coppie di punti coniugati armonici, le due coniche C risultano riferite proiettivamente in un modo determinato.

Ora le coppie di punti omologhi di due C coniugate, danno luogo su F ad una involuzione I che accoppia le C coniugate, come appunto avevamo richiesto.

5. Si costruisca una nuova superficie F′ i cui punti corrispondano alle coppie dell'involuzione I ottenuta su F. Alle coniche C di F corrispondono su F′ curve razionali C′, e precisamente ogni C′ corrisponde a due C coniugate. Le C′ formano dunque su F′ un fascio *lineare* di curve razionali. Allora (col sig. Nöther) si può costruire su F′ una curva unisecante le C′ (cfr. anche il n. 2). A questa corrisponde sopra F una curva unisecante le C.

Tanto basta per affermare che la superficie F può essere riferita birazionalmente ad una rigata ellittica, di cui le generatrici corrispondono alle C.

6. Il metodo precedente si fonda sopra la circostanza che « date due curve ellittiche λ e σ rappresentate doppiamente sopra uno stesso ente ellittico (o curva) γ, ogni g'_2 di γ corrisponde (in due modi) ad una g'_2 (coniugata di sè stessa) tanto su λ che su σ". L'ente ellittico γ era nel nostro caso il fascio delle coniche C della superficie F, nel qual fascio appunto avevamo scelto una g'_2 qualsiasi.

Ora evidentemente basta pel nostro scopo aver constatato l'esistenza di una particolare g'_2 di γ cui corrisponda tanto su λ come su σ una g'_2 (coniugata di se stessa).

Osservato ciò, il metodo si estende senz'altro al caso in cui il genere p del fascio di coniche C, valga $p = 2$.

Infatti si ha il seguente lemma: *ogni curva di genere 3 rappresentata sopra una curva doppia di genere due, è iperellittica*; e perciò « se due curve λ e σ di genere $2p - 1 = 3$ sono rappresentate doppiamente sull'ente γ di genere $p = 2$, alla g'_2 di γ corrisponde tanto su λ come su σ una g'_2 (coniugata di sè stessa) ».

Resta da giustificare il lemma precedente.

A tal fine (procedendo per assurdo) si dimostrerà che una curva di genere 3 non iperellittica non può essere riferibile ad una curva doppia di genere due, ossia non può contenere una involuzione di coppie di punti senza coincidenze. Per ciò basta considerare la quartica piana senza punti doppî (curva canonica di genere 3, non iperellittica), ed osservare come una involuzione sopra di essa viene subordinata da un'omologia piana armonica, di cui l'asse incontra la quartica in qualche punto unito.

Fisica. — *Sulla variazione della costante dielettrica del caoutchouc per la trazione* (1). Nota dei dott.ri O. M. Corbino e F. Cannizzo, presentata dal Socio Blaserna.

Ci siamo proposti di ricercare se la trazione abbia influenza sulla costante dielettrica del caoutchouc.

La disposizione impiegata è analoga a quella descritta in un lavoro pubblicato da uno di noi sull'influenza della trazione sulla costante dielettrica

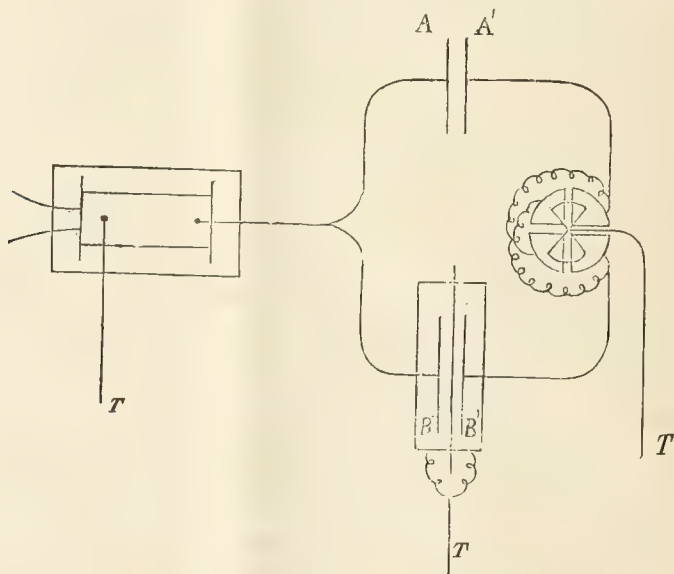



Fig. 1.

del vetro (2). Un rocchetto di Rumkorff (fig. 1), animato dalla corrente di

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo, diretto dal prof. Damiano Macaluso.

(2) O. M. Corbino, *Ricerche sulla variazione della costante dielettrica per la trazione del coibente*. Riv. scient. ind. n. 8-9, 1897.

due pile Bunsen che veniva interrotta da un elettrodiapason 250 volte al secondo, aveva un estremo in comunicazione col suolo e l'altro in comunicazione con i due piatti A e B di due condensatori. Gli altri due piatti A′ e B′ erano in comunicazione rispettivamente con le due coppie di quadranti di un elettrometro Mascart, il cui ago era rilegato al suolo.

Il condensatore [A A′] fu costituito sostituendo alle due palline di uno spinterometro due piatti di ottone perfettamente paralleli; essi erano spostabili per mezzo di una vite micrometrica.

Il condensatore [B-B′] era formato di due piatti sostenuti da colonnine di dielettrina, e tra essi si trovava distesa una lamina di caoutchouc rosso delle seguenti dimensioni: lunghezza cm. 23, larghezza cm. 16, spessore cm. 0,37.

Intorno al condensatore [B B′] venne adattata per evitare le influenze esterne disturbatrici, una cassetta di paraffina rivestita esternamente di stagnola messa in comunicazione col suolo.

La cassetta era fissata in modo invariabile ai piatti, e provvista superiormente e inferiormente di due finestre per dar passaggio al caoutchouc.

Per poter stirare la lamina, essa era serrata tra due coppie di sbarrette di ebanite; di queste coppie la superiore per mezzo di grossi cordoni isolanti di seta, era fissata a una sbarra di acciajo, e l' inferiore a un uncino rilegato a una robusta leva di legno di secondo genere, la quale scorrendo esattamente tra due guide verticali, impediva ogni spostamento trasversale della lamina.

All' estremo della leva fu sospeso un piattello destinato a reggere i pesi; l'uncino rilegato alla lamina era fissato per mezzo di cordoni di seta a un quarto della lunghezza della leva stessa.

Si cominciava con lo spostare i piatti A e A′ fino a che, funzionando il rocchetto, sui piatti A′ e B′ si ottenessero potenziali eguali, il che si poteva constatare facilmente osservando se l' ago dell' elettrometro, già reso simmetrico rispetto ai quadranti, subisse deviazione dalla posizione normale. Ci assicuravamo della simmetria dell' ago con la inversione dei contatti tra le coppie dei quadranti dell'elettrometro e i piatti A′ e B′. Si verificò inoltre con cura la bontà dell' isolamento delle varie parti. Avuto riguardo alla brevissima durata delle cariche successivamente alternate, l' isolamento nel nostro caso si poteva ritenere perfetto.

Più difficile a ottenere era un funzionamento regolare dell'elettrodiapason, essendo le correnti da noi impiegate molto più intense di quelle per cui esso è normalmente destinato, ed anche per l' azione perturbatrice delle vivaci scintille dovute alla forte estracorrente di apertura. Si dovè perciò sostituire alla punta ordinaria di platino, che era rapidamente consumata dalle scintille, una laminetta a punta rotonda; si inserì in derivazione tra la punta e il piano, il condensatore di un rocchetto di grande modello; e si procurò che

la punta fosse rilegata al polo positivo della pila. Si fissò inoltre solidamente tutto l'elettrodiapason a un tavolo di marmo, precauzione che fu forse la più efficace per avere un suono perfettamente puro e costante, perchè così si evitarono i tremiti che erano una delle più gravi cause disturbatrici.

Il condensatore A A′ era collocato a grande distanza dal restante apparecchio.

In queste condizioni, ottenuto una volta l'equilibrio dei potenziali in A′ e B′, esso si conservava per lungo tempo, anche quando una persona si avvicinava a [B B′]. Così disposte le cose, si applicavano dei pesi al piattello della leva, lasciando sempre a posto il peso destinato a tenere in tensione la lamina. Questa si deformava regolarmente, conservandosi di forma rettangolare coi lati verticali leggermente concavi e scorrendo tra le finestre della cassetta di paraffina *senza toccarla.*

All'aumentare della trazione si osservava un notevole spostamento dell'ago, che spariva ritornando al carico primitivo, salvo un piccolo effetto temporaneo accompagnante la deformazione permanente della lamina. Il senso dello spostamento dimostrava che per lo stiramento della lamina era diminuita l' influenza del piatto B sul piatto B′. L'ago si poteva riportare a zero allontanando convenientemente i piatti A-A′ del condensatore ad aria.

Era però necessario tener presente che per l'assottigliamento della lamina conseguente alla trazione, diminuiva l' influenza del piatto B sul piatto B′, indipendentemente da ogni variazione delle proprietà dielettriche del mezzo. Occorreva quindi misurare nello stesso tempo tale assottigliamento, per poter sceverare l'effetto dovuto alla variazione di dimensioni da quello dovuto alla variazione della costante dielettrica.

Ecco il procedimento seguito a tal fine.

Siccome sarebbe stato difficile, data la grande cedevolezza della sostanza, determinare direttamente la contrazione trasversale della lamina, si preferì misurarne con esattezza l'allungamento per mezzo del catetometro, e determinarne poi il coefficiente di Poisson per deformazioni dello stesso ordine di grandezza.

Determinata la deviazione n dell'elettrometro prodotta dall'aumento del peso tensore e l'allungamento della lamina, la si toglieva dolcemente dal posto, procurando di non toccare i piatti tra cui era distesa, e si leggeva la nuova deviazione N. Durante questa operazione si interrompeva la comunicazione tra i piatti A e B e il rocchetto che continuava a funzionare. Per assicurarsi che l'operazione si fosse compiuta senza urti o spostamenti, si rimetteva la lamina col primitivo peso tensore e ci si assicurava che l'ago tornasse alla posizione di prima a meno di una frazione di divisione. Delle esperienze nelle quali questa condizione non si trovò soddisfatta, non si tenne alcun conto.

Gli elementi così determinati sono sufficienti per separare gli effetti dovuti all'assottigliamento, da quelli dovuti alla variazione della costante dielettrica.

Sia infatti D lo spessore della lamina d'aria che si dovrebbe avere tra B e B′, perchè B′ si porti allo stesso potenziale di A′. Se l'ago è a zero quando la lamina regge il carico iniziale tensore, indicando con e lo spessore della lamina, con K la sua costante dielettrica, e con d la distanza vera dei piatti A, A′, sarà

$$(1) \qquad D = d - e + \frac{e}{K} = d - e\frac{K-1}{K}$$

In seguito allo stiramento, lo spessore e diviene $e(1-\alpha)$, essendo α la contrazione per unità di spessore, la costante dielettrica K diviene K′, e l'ago devia di n divisioni; allora, se lo spostamento di 1 mm. dei piatti B, B′ produce una deviazione di ν divisioni, per riportare l'ago a zero si dovrebbero avvicinare i piatti di $\frac{n}{\nu}$ mm.; avremo quindi

$$(2) \qquad D = d - \frac{n}{\nu} - e(1-\alpha)\frac{K'-1}{K'}$$

Leviamo infine la lamina; se l'ago devia di N divisioni, perchè ritorni a zero i piatti dovrebbero subire un avvicinamento di $\frac{N}{\nu}$ mm.; sarà perciò

$$(3) \qquad D = d - \frac{N}{\nu}$$

Per confronto con la (1) e con la (2) si ottiene il sistema

$$\frac{N}{\nu} = e\frac{K-1}{K} = \frac{n}{\nu} + e(1-\alpha)\frac{K'-1}{K'}$$

da cui eliminando ν

$$(1-\alpha)\frac{K'-1}{K'} = \frac{N-n}{N}\,\frac{K-1}{K}\,.$$

Indicando con λ l'allungamento unitario e con μ il coefficiente di Poisson, si ha intanto

$$\alpha = \mu\,\lambda$$

sostituendo nella precedente si ottiene

$$\frac{K'-K}{K} = -(K-1)\left(1 - \mu\,\lambda - \frac{N-n}{N}\right).$$

Ora K — 1 è positivo; i valori ottenuti per l'espressione $1 - \mu\,\lambda - \frac{N-n}{N}$ sono stati sempre positivi, anche assumendo per μ il valor limite teorico $\frac{1}{2}$, mentre, come si vedrà in seguito, nei limiti di deformazione in cui si è operato, il coefficiente stesso era 0,42; cosicchè *per la trazione la costante dielettrica del caoutchouc diminuisce.*

Sono state fatte molte esperienze, variando il potenziale di carica col modificare l'intensità della corrente inducente. Ci limitiamo a riferire i risultati ottenuti con potenziali tali che levando la lamina l'ago deviasse di 65, di 82, e di 150 divisioni.

Scegliendo le esperienze più sicure, in cui cioè l'elettrodiapason conservava un andamento perfettamente regolare per tutta la durata dell'esperienza, si è costruita la seguente tabella in cui si trovano: nella prima colonna i pesi tensori che si aggiungevano successivamente al carico iniziale; nella seconda gli allungamenti corrispondenti della lamina per unità di lunghezza; nella terza, quarta e quinta, le deviazioni n che si avevano con lo stiramento per i diversi valori del potenziale e quindi di N; infine nell'ultima colonna il valore medio dell'espressione $\frac{N-n}{N}$.

Peso tensore Kg.	Allungamento unitario	Valori di n per			$\frac{N-n}{N}$
		$N=65$	$N=82$	$N=150$	
4	0,032	2,5	2,7	4,7	0,966
8	0,064	4,0	5,8	9,7	0,934
12	0,095	6,0	8,8	15,0	0,900
16	0,129	8,0	11,8	20,9	0,865

Conosciuti i valori di $\frac{N-n}{N}$, per ricavare dalla (4) i valori di $\frac{K'-K}{K}$ era necessario conoscere il coefficiente μ.

Molti fisici si sono occupati di questa determinazione per il caoutchouc, e sono venuti a risultati che sembrano a prima vista assolutamente in disaccordo; si va, per es., dal valore 0,22 al valore 0,50. Risulta però assodato che in conseguenza della grande cedevolezza di questa sostanza e della sua piccolissima variabilità di volume nelle deformazioni, il coefficiente di Poisson deve diminuire col crescere dello stiramento; così, per citare una delle determinazioni più recenti (Bierken) (1), esso può variare dal valore 0,50 corrispondente a piccolissime deformazioni, fino al valore 0,125, corrispondente a grandi deformazioni. Inoltre, come risulta dalle ricerche del Villari (2), del Naccari (3), ecc. a parità di deformazione esso varia a seconda delle diverse qualità di caoutchouc adoperate. Era quindi indispensabile eseguire una determinazione diretta sul caoutchouc stesso servito alle precedenti misure e negli stessi limiti di deformazione.

(1) Bierken, Wied. Ann. t. XLIII, pag. 817.
(2) Villari, *Nuovo Cimento* (2) I, pag. 332, 361, 1869.
(3) Naccari e Bellati, *Nuovo Cimento* (3), 2, 1877, pag. 217.

A tal uopo basta, com' è evidente, determinare l'allungamento e la corrispondente variazione di volume di una laminetta parallelepipedica della sostanza.

Detto V il volume, a, b, c, le tre dimensioni di questo parallelepido rettangolo, λ l'allungamento unitario, μ il coefficiente di Poisson, e γ la variazione unitaria di volume, si ha

$$\gamma = \frac{V_1 - V}{V} = -2\mu\lambda + \mu^2\lambda^2 + \lambda - 2\mu\lambda^2 + \mu^2\lambda^3$$

dalla quale risolvendo rispetto a μ e scegliendo tra le due soluzioni quella inferiore all'unità, si ha

$$\mu = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{1+\gamma}{1+\lambda}}\right]$$

per avere μ basta quindi determinare sperimentalmente γ e λ. A tal fine si costruì l'apparecchio disegnato qui a fianco (fig. 2); esso è formato di due sbarrette di ottone, a e b, tenute fisse tra loro per mezzo di due colonnine di acciajo AB, CD. In una madrevite scavata nel mezzo di a scorreva una vite V destinata a tirare una sbarretta c, la quale, com' è facile ricavare dalla figura, non poteva spostarsi che parallelamente a se stessa. Ai pezzi b e c si fissavano per mezzo di laminette di ottone e di viti le estremità di una striscia di caoutchouc tagliata dalla lamina stessa che si era adoperata nelle determinazioni precedenti. Le deformazioni venivano prodotte girando la vite. L'apparecchino (del peso di circa cento grammi, compreso il caoutchouc) veniva sospeso ad un estremo di una bilancia molto sensibile ed immerso in un grande bicchiere pieno di acqua; si determinava così, con le comuni precauzioni, la variazione di spinta e quindi la variazione di volume conseguente a una determinata deformazione.

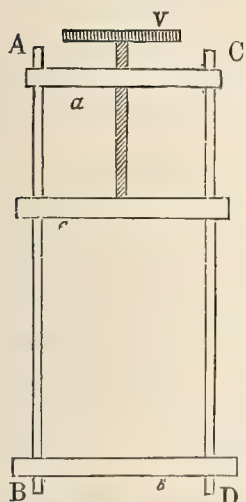



Fig. 2.

Per il calcolo di $\gamma = \frac{V_1 - V}{V}$, siccome la variazione di volume $V_1 - V$ data dalla bilancia era piccolissima rispetto a V (inferiore a $^1/_{1000}$), ci si poteva contentare di una misura approssimata del denominatore V, quale poteva dedursi dalla determinazione diretta delle dimensioni. L'allungamento λ veniva misurato direttamente alla macchina a dividere, ed era compreso negli stessi limiti delle determinazioni precedenti. Si è così ottenuto, come media di parecchie misure concordanti nella seconda cifra decimale,

$$\mu = 0{,}42$$

con questo valore di μ sono stati calcolati i seguenti valori dell'espressione $1 - \mu\lambda - \frac{N - n}{N}$ che entra nella (4).

Peso	λ	$1 - \mu\lambda - \frac{N - n}{N}$
4	0,032	0,021
8	0,062	0,040
12	0,095	0,060
16	0,129	0,081

Moltiplicando i valori dell'ultima colonna per la costante $K - 1$, si ottengono in virtù della (4) le variazioni relative della costante dielettrica per i diversi valori del peso tensore. Come si vede, indipendentemente dalla determinazione di K, è messo fuori dubbio che la costante stessa diminuisce per la trazione, anche tenendo conto delle variazioni di dimensioni. Inoltre la proporzionalità della variazione al peso e alla deformazione è, nei limiti degli errori, quasi perfetta.

Sembra quindi che si possa esprimere la costante dielettrica del caoutchouc in funzione dello allungamento, mediante la formola

$$K' = K(1 - A\lambda)$$

ove si avrebbe, come si ricava dallo specchietto precedente per deformazioni nei limiti di quelle da noi studiate,

$$A = 0,64\,(K - 1)$$

come si vede la variazione della costante dielettrica sarebbe notevolissima nel senso normale alla trazione dato il grande valore che può assumere λ, e il valore notevole di A. Niente si può dire per ora sul valore della variazione nel caso che la trazione agisca parallelamente al campo. Se la sostanza acquista una struttura anisotropa, come risulta dalla doppia rifrazione accidentale per la luce osservata dal Bierken [1], attesa questa grande variazione della costante in una direzione, non è improbabile una energica doppia rifrazione accidentale per le onde elettriche, fenomeno ricercato dal Righi [2] sul vetro con esito negativo.

Ci riserbiamo di intraprendere delle esperienze in proposito [3].

[1] Bierken, Wied. Ann. t. XLIII, pag. 806.

[2] Righi, *L'ottica delle oscillazioni elettriche*. Bologna, pag. 191, § 55.

[3] *Aggiunta.* — Mentre aspettavo, per correggere, le bozze di questo lavoro, mi è pervenuta una Nota del dott. G. Ercolini (Rend. Lincei, vol. VII, 5, fasc. 7° e 8°), nella quale è asserito che per determinare le piccole variazioni della costante dielettrica, il metodo da me impiegato nelle ricerche col vetro stirato, e che è stato anche impiegato nelle superiori esperienze, « non permette di decider nulla, poichè basta pensare alla estrema « delicatezza ed alla grande difficoltà delle esperienze di elettrostatica in generale, per « concludere subito che l'uso da esse del rocchetto di Rumkorff è tutt' altro che indicato; « anzi in nessun caso può essere usato come sorgente costante di elettricità ».

Mi permetto di osservare che questo metodo non è che una lieve modificazione di quello usato nelle classiche esperienze del Gordon, il quale lo attinse alle indicazioni di

Fisica. — *Sopra una nuova azione che la luce subisce attraversando alcuni vapori metallici in un campo magnetico.* Nota I. del prof. D. Macaluso e del dott. O. M. Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

Se ad un fascio di luce bianca, polarizzata rettilineamente, si fa attraversare una fiamma molto ricca di vapori di sodio o di litio, che si trovino in un campo magnetico, e se la direzione dei raggi trasmessi è parallela a quella delle linee del campo, la luce subisce, oltre a quelle osservate per la prima volta dal Zeemann, altre importanti modificazioni sulle quali ci permettiamo di richiamare l' attenzione dell' Accademia.

La disposizione sperimentale, da noi adottata per lo studio di tali modificazioni, è stata la seguente:

Un fascio di luce solare, polarizzato da un nicol, si faceva propagare attraverso al nucleo di una elettrocalamita, di modello Ruhmkorff, che portava all' estremità, dalla quale il raggio usciva, un secondo nicol girevole attorno all' asse dell' elettromagnete.

In seguito questo fascio emergente, dopo avere attraversato una lente cilindrica verticale, incontrava un reticolo concavo di Rowland (raggio di curvatura 10 piedi, numero di divisioni per pollice 14438) con le striature anche verticali. Il secondo spettro di diffrazione, da questo riflesso, era osservato con un oculare a forte ingrandimento. Nel piano in cui si formava l' immagine reale delle linee di Fraunhofer si collocava o un sottile filo di ragno,

---

Maxvell e di Lord Kelvin; e che al rocchetto hanno ricorso gran numero di sperimentatori, e in particolare, con una disposizione identica alla mia, il Lecher nella seconda serie delle esperienze riferite a pag. 142 del tomo XLII dei Wiedemann Annalen. In quanto poi all' impiego di un elettrometro la cui capacità non era piccolissima in paragone con quella della quale si volevano constatare le variazioni, mi sembra che ciò possa tutt' al più diminuire la sensibilità del metodo, la quale però era, per le disposizioni dell'elettrometro, ancora abbastanza grande. In ogni modo, dalla maggiore o minore sensibilità del metodo non potevano essere alterati qualitativamente i risultati delle esperienze in modo da cambiarne il senso.

Relativamente all'assorbimento nel dielettrico, ho potuto assicurarmi con esperienze dirette che a un estremo del rocchetto il potenziale medio fosse zero; d'altra parte le conclusioni che il Borel trae dalle sue esperienze sono soltanto ipotetiche e contestate dal fatto che, una volta ottenuto l'equilibrio dei potenziali nei piatti collettori dei due condensatori messi a confronto, l'equilibrio si mantiene per più di mezz' ora, le deviazioni successive sono permanenti e l'ago ritorna alla posizione primitiva appena si toglie il peso tensore, il che esclude l'azione indefinitamente crescente di un riscaldamento continuo.

Nelle presenti esperienze poi, essendo la armature staccate dalla lamina dielettrica, è ancora meno a temersi l' influenza dell' assorbimento nel coibente. O. M. C.

o una fenditura, o un micrometro inciso su vetro. La distanza apparente di due divisioni successive di questo, osservata coll'oculare, era poco superiore ad 1 mm.

Nelle condizioni delle nostre esperienze, la distanza fra gli assi delle due D era di poco inferiore a 14 divisioni, cioè equivalente, apparentemente, a circa 20 mm.

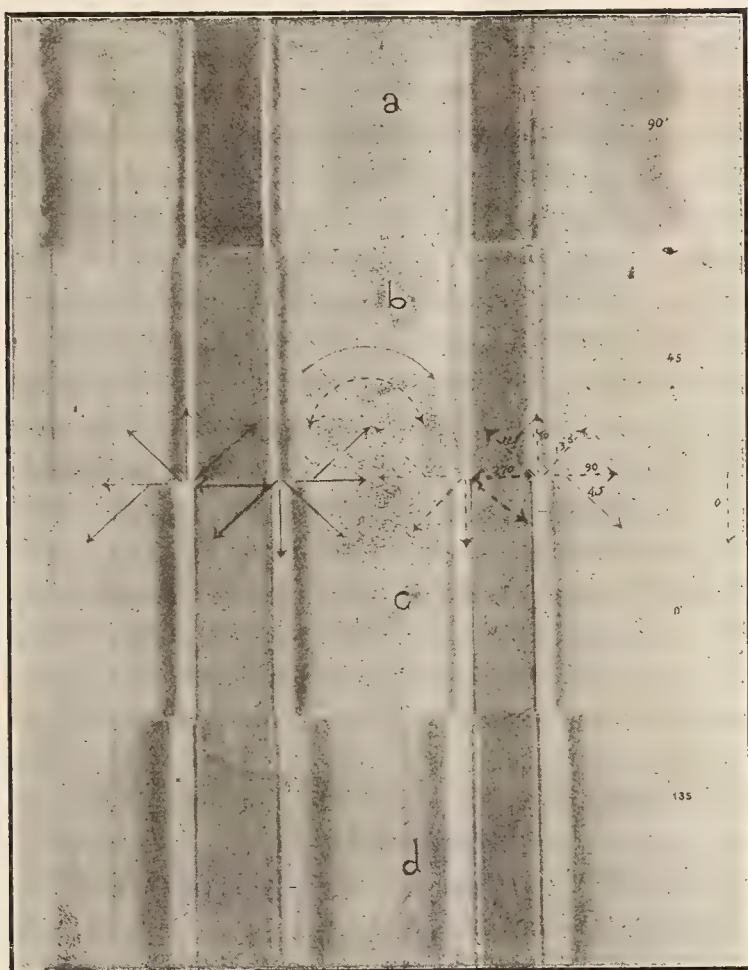
Fra i poli dell' elettromagnete, posti alla distanza di 14 mm., si collocava una grossa fiamma di un bruciatore di Bunsen, in modo che lambisse da un lato uno dei due poli e dall' altro lato, e più in basso dell' altro polo, una perla di cloruro o di bromuro di sodio, precedentemente riscaldato ad alta temperatura, ovvero di cloruro di litio. La distanza tra la lente e la fiamma essendo di circa 1^m, la luce che quella riceveva da questa era assai debole, e perciò lo spettro proprio della fiamma era quasi perfettamente invisibile nello oculare. Le condizioni e la disposizione relativa della fiamma e del sale dovevano esser tali che le linee di assorbimento del corrispondente metallo fossero molto slargate, perchè, solo in tal caso, potevano essere bene osservate le modificazioni che la presenza del campo produceva nella luce che lo attraversava. Dopo alcuni tentativi e con un po' di pratica e di pazienza, non riusciva molto difficile ottenere che la larghezza della D_2 ($\lambda = 0,0005890$ di Rowland) fosse eguale ad un quarto della distanza degli assi delle due D.

Se per le condizioni del vapore metallico, quella larghezza era minore di un quinto di questa distanza, per una ragione che appresso diremo le osservazioni e specialmente le misure riuscivano difficili ed incerte, e tanto più quanto più piccola era quella larghezza. L' intensità media del campo nel posto attraversato dalla luce, in quasi tutte le nostre esperienze, oscillò fra 4000 e 4500 unità C. G. S.

Esperienze con cloruro e bromuro di sodio. — Dopo disposte le esperienze come sopra è detto, essendo i piani di polarizzazione dei due nicol paralleli (per fissare le idee li supporremo verticali) e la corrente magnetizzante interrotta, ottenuto, come sopra è detto, per tentativi che le due righe D fossero molto slargate, nel qual caso i due bordi di ognuna erano un poco sfumati, si eccitava il campo.

Allora da ambo i lati di ciascuna delle due righe, e veramente nel posto preciso dove a corrente interrotta cominciavano le sfumature, compariva una lineetta oscura (vedi l'annessa figura *c*) [1] seguita da una linea chiara più larga, che era seguita alla sua volta da una linea oscura di questa ancora più slargata e che si sfumava verso l' esterno, in modo che ad una distanza dall' asse della riga eguale a più di due terzi della distanza degli assi delle D l' illuminazione del campo dell' oculare restava invariata, cioè la stessa che prima dell' azione del campo magnetico. Le apparenze erano identiche dai due lati

[1] Per mancanza di tempo non si sono potute avere figure che rappresentino il fenomeno meglio di quello che fanno le figure intercalate e che debbono perciò riguardarsi come semplici figure schematiche

di ciascuna riga, ed eguali per le due righe; solo che la distanza alla quale si formava ciascuna delle linee alternativamente chiare ed oscure, pareva che fosse proporzionale alla larghezza della corrispondente riga. Da una serie di misure successive, fatte al micrometro oculare, della larghezza l di ciascuna D

Angolo dei nicol.
90° nella *a*; 45° nella *b*; 0° nella *c*; 135° nella *d*.

e della distanza δ degli assi di ciascuna coppia delle due linee oscure più esterne che la fiancheggiano, si è avuto

$$\text{per la } D_1 \ \frac{\delta}{l} = 1{,}66 \, ; \ l = 2{,}8 \qquad \text{per la } D_2 \ \frac{\delta}{\lambda} = 1{,}60 \, ; \ l = 3{,}7.$$

Togliendo il polarizzatore il fenomeno spariva quasi completamente, o meglio se ne aveva una traccia la cui visibilità dipendeva dalla inclinazione del fascio solare con la superficie del porta luce; è da ritenere perciò che il fenomeno non si manifesti che con luce polarizzata [1].

[1] Siamo dolenti, che i mezzi del laboratorio non ci abbiano consentito di fare le esperienze con luce elettrica.

Invertendo la direzione del campo, il fenomeno restava immutato. Girando uno dei nicol [1] di 90°, cioè mettendo i due nicol incrociati, con che a corrente interrotta si aveva nell' oculare oscurità completa, appena eccitato il campo compariva un fenomeno analogo a quello di prima, e quale è riprodotto nella fig. *a*, diverso cioè per la disposizione delle righe luminose ed oscure, e veramente dai due lati di ciascuna delle righe D, nel posto dove a nicol paralleli si aveva il massimo di luce, ora si presentava la massima oscurità e viceversa.

Vedevasi perciò ciascuna delle D più oscura che nel caso dei nicol paralleli (l' assorbimento in quest' ultimo caso non è completo), fiancheggiata da ogni lato da una lineetta luminosissima seguita da una linea oscura più larga, sfumata sui bordi, specialmente sull' esterno, e seguita da una banda larga luminosa che si andava sempre più oscurando col crescere della distanza dal bordo della riga.

In buone condizioni sperimentali tutta la parte dello spettro, frapposta fra le due linee oscure che costeggiavano i due lati interni delle due D, diventava luminosa, con una piccola sfumatura oscura nel mezzo, e su questa parte dello spettro vedevansi nettamente spiccare le righe del Fraunhofer. Dai due lati esterni, nei quali perciò avevasi luce per la D_2 più e per la D_1 meno rifrangibile, ad una distanza dall' asse della corrispondente D poco superiore a due terzi della distanza degli assi medesimi, il campo dell' oculare restava perfettamente oscuro, cioè non subiva mutamenti luminosi per l' azione del campo magnetico, come immutata era rimasta l' illuminazione a nicol paralleli.

Anche in questo caso l' inversione del campo magnetico non alterava le apparenze del campo luminoso.

Con la rotazione di 90° gradi del nicol, adunque, le bande luminose dell' esperienza a nicol paralleli si mutavano in oscure e viceversa; in modo che a nicol incrociati si avevano per così dire le apparenze complementari di quelle a nicol paralleli. Questo medesimo cambiamento si otteneva, senza mutare l' orientazione dei nicol, con la semplice introduzione di una mica mezza onda nel cammino del fascio emergente dall' elettrocalamita e con l' asse a 45° del piano di polarizzazione dell' analizzatore che, come fu detto, era verticale. Con la introduzione di questa mica nella metà superiore o inferiore del fascio, si avevano simultaneamente, sovrapposte, nel campo dell' oculare, separate da una linea orizzontale, le due apparenze viste successivamente a nicol paralleli o incrociati. In questa esperienza gli assi delle linee oscure e luminose

[1] Per semplicità di ragionamento supporremo sempre in appresso, che l' angolo dei piani dei nicol si faccia mutare per rotazione dell' analizzatore. Nelle esperienze però si girava invece in senso opposto il polarizzatore, e ciò per non mutare gli angoli del piano di polarizzazione con i piani di riflessione del reticolo.

di una metà del campo erano esattamente sul prolungamento degli assi delle linee rispettivamente luminose ed oscure dell' altra metà (1).

Facendo variare l' angolo dei due nicol mutavano anche le apparenze del campo luminoso che conservava però il carattere generale di essere solcato da linee alternativamente oscure e luminose. Dippiù, contrariamente a quel che avveniva nel caso di nicol o paralleli o incrociati, con l' inversione del campo magnetico l'apparenza del fenomeno mutava più o meno, secondo che il valore dell' angolo dei due nicol era più o meno prossimo a 45°, e differiva più o meno da 0° e 90°.

Nella figura *b* sono riprodotte le apparenze del campo luminoso per il caso in cui, a partire dalla posizione nella quale i piani dei nicol erano paralleli, si fosse girato l' analizzatore di 45°, nel senso della corrente ; nella fig. *d* le stesse apparenze nel caso che tale rotazione, sempre nello stesso verso, fosse di 135°. Bastava invertire il campo affinchè le apparenze *b* si mutassero nelle *d* e viceversa.

Girando l' analizzatore in modo continuo si spostavano anche in modo continuo le bande luminose ed oscure, analogamente a quel che avviene nello spettro di un fascio di luce bianca che abbia attraversato due nicol, l' angolo delle cui sezioni principali muti di continuo e fra i quali sia interposta una lamina di quarzo perpendicolare all' asse. Però, mentre nel caso del quarzo, o di altra sostanza dotata di potere rotatorio, tutte le linee oscure che solcano lo spettro si muovono nello stesso senso, dipendente dal senso di rotazione del nicol mobile e dalla natura della sostanza interposta (levo o destrogira) nel nostro caso le linee che nello spettro erano da un lato di ciascuna D si muovevano in senso opposto a quello secondo cui si muovevano quelle dell' altro lato. Il senso dello spostamento dipendeva poi, non solo dal senso in cui girava l' analizzatore, ma anche dal senso in cui circolava la corrente magnetizzante. Se la rotazione dell' analizzatore era nello stesso senso in cui si propagava la corrente nelle spire dell' elettromagnete, le linee da ciascun lato delle righe D si spostavano dall' esterno verso i bordi delle righe stesse; ed in direzioni opposte se si girava il l'analizzatore in senso inverso alla corrente. Così, se a partire da nicol incrociati si girava l' analizzatore in senso opposto alla corrente magnetizzante, si vedevano succedere alle apparenze *a* le *b*, cui sostituivansi in seguito le *c*, seguite alla loro volta dalle *d*, cui succedevano nuovamente le *a*, e così di seguito.

(1) Per mutare il meno possibile le condizioni del cammino delle due metà del fascio anzichè di una sola mica mezza onda, ci siamo serviti di una mica quarto di onda sovrapposta ad una seconda mica doppia, sistema Bravais, anche essa quarto d' onda, in modo che l' asse d' una metà di questa fosse parallelo all' asse della mica semplice. È da avvertire inoltre che, per potere osservare nettamente la sovrapposizione dei due effetti, bisogna disporre gli apparecchi in modo da vedere distinte non solo le linee dello spettro solare, ma anche quella di separazione delle due metà della doppia mica Bravais.

In conseguenza di ciò per un dato angolo α dell' analizzatore col polarizzatore, invertendo la corrente, le apparenze diventavano le stesse che si sarebbero avute se, senza inversione della corrente, si fosse girato l' analizzatore di -2α, ovvero di $180^\circ - 2\alpha$.

Se l' angolo qualunque dei due nicol era aumentato o diminuito di 90°, si aveva nel campo luminoso l' aspetto complementare. Ciò fu verificato accuratamente o con misure fatte al reticolo oculare, o anche fissando un filo sottile dell' oculare sopra una delle righe in esame. Invertendo perciò la corrente, nel caso che l' angolo dei due nicol era di 45°, si aveva anche la completa sostituzione delle linee oscure con le luminose, e di queste con quelle (vedi le fig. *b* e *d*).

Per la rotazione dell' analizzatore le linee oscure e luminose allontanandosi dalle D si slargavano rapidamente, per andarsi a confondere nell' illuminazione che, per lo stesso angolo dei due nicol, presentava lo spettro senza campo magnetico, ad una distanza dai due bordi delle righe eguale circa a due terzi della distanza degli assi di queste.

Se sul cammino del fascio emergente dal campo magnetico s' introduceva una mica mezza onda si aveva uno spostamento delle linee, tale che il campo luminoso dell' oculare si trasformava in quello che si sarebbe avuto per una rotazione dell' analizzatore doppia dell' angolo formato dall' asse della mica col piano primitivo dell' analizzatore. L' introduzione perciò di una mica mezza onda, convenientemente orientata, su metà del fascio emergente dal campo magnetico, permetteva di paragonare direttamente e senza bisogno di una serie di misure penose, le apparenze che, nel campo di visione, si sarebbero avute per due posizioni dell' analizzatore formanti un dato angolo fra loro.

Anche con uno spettroscopio a prismi, tale da dar nettamente separate le due D, si possono osservare alcuni dei fenomeni precedentemente descritti. Eccitando il campo, a nicol paralleli, le D diventano più oscure e più larghe. A nicol incrociati, mentre senza campo si vedono due sole linee gialle (di emissione) poco luminose e separate da una linea oscura più larga, col campo si vede una linea molto luminosa, più larga della somma delle tre precedenti, solcata da tre sottili linee oscure. In questi due casi l' inversione del campo non produce alcun mutamento nello aspetto dello spettro. Coi nicol a 45°, a seconda della direzione del campo, si ha o una larga riga più luminosa di tutto il campo restante, con due linee oscure non molto sottili nel mezzo, o la stessa riga solcata da una serie (forse cinque) di lineette oscure sottilissime. L' inversione del campo cambia queste ultime due apparenze l' una nell' altra.

Rotazione del piano di polarizzazione. — Tutti i fenomeni da noi descritti si possono interpretare in modo semplice, ammettendo che siano dovuti a rotazioni (diverse per le luci di diversa lunghezza d' onda) del piano di polarizzazione primitivo del fascio luminoso, per il suo passaggio attraverso ai vapori

di sodio influenzati dal campo magnetico. Questa rotazione (nelle nostre condizioni sperimentali) dovrebbe esser nulla o inapprezzabile coi nostri apparecchi per le luci che nello spettro occupano dai due lati di ciascuna D, posizioni distanti dall' asse di queste righe di assorbimento superiori ai due terzi della distanza degli assi. Col diminuire di quella distanza, la rotazione, simmetricamente dai due lati di ciascuna D, andrebbe crescendo in modo continuo, restando sempre i piani di polarizzazione paralleli tra loro a distanze eguali dai bordi di ciascuna riga di assorbimento. Su questi bordi la rotazione sarebbe di 270°. La direzione di ogni piccola freccia tratteggiata nella figura precedente darebbe, per il posto corrispondente al suo piede nello spettro, la direzione dei varî piani di polarizzazione della luce emergente dai vapori di sodio *magnetizzati*, nel caso in cui il piano della luce incidente fosse verticale e la corrente circolasse, guardata dal lato dell' analizzatore, nel senso indicato dalla freccia arcuata e tratteggiata. I numeri scritti accanto a ciascuna freccia darebbero la rotazione corrispondente dei piani di polarizzazione.

Le frecce intere indicherebbero quelle direzioni nel caso della corrente invertita.

La rotazione relativa, ossia la differenza delle rotazioni corrispondenti a piccoli spostamenti eguali sullo spettro, crescerebbe rapidamente a misura che ci si avvicina al bordo di ciascuna delle D. Ciò si manifesterebbe con l' assottigliarsi delle linee luminose ed oscure all' avvicinarsi di queste ai bordi delle righe, per la rotazione dell' analizzatore.

Dalle misure fatte risulterebbe che sul bordo di ciascuna linea di assorbimento questa rotazione sarebbe di circa 90° per una variazione di λ eguale a 0,000025 λ, ossia eguale a 0^{μ},000015, mentre nel posto in cui la rotazione comincierebbe a manifestarsi, per la stessa variazione di λ, si avrebbe una rotazione all' incirca settanta volte minore.

Anche in modo molto semplice, con l' ipotesi delle rotazioni del piano di polarizzazione, si interpetra il cambiamento prodotto nelle *apparenze* del campo luminoso da una mica mezza onda, introdotta nel cammino del fascio luminoso in esame. Basta ricordare perciò che una tal mica, introdotta nel cammino di un fascio luminoso, produce una rotazione del piano di polarizzazione eguale al doppio dell' angolo fatto dall' asse della mica col piano primitivo, contati gli angoli nello stesso verso.

È facile anche comprendere come debbano sparire con la luce naturale i fenomeni da noi osservati, perchè, per il modo come questa è costituita, in ogni regione dello spettro, per una posizione dell' analizzatore, debbono succedersi tutte le illuminazioni che si sarebbero avute nello stesso posto col variare di continuo rapidissimamente l' angolo dei due nicol nelle nostre esperienze.

Influenza delle condizioni della fiamma che producono lo slargamento delle righe. — La larghezza delle righe di emissione e delle corrispondenti di assorbimento varia, come si sa, col variare delle condizioni della fiamma nella

quale si produce il vapore metallico. Da uno studio dell' Ebert [1] risulta che tale larghezza cresce sopratutto col crescere della densità del vapore. La variazione di questa densità nelle nostre esperienze ottenevasi col portare la perla del sale in punti diversi della fiamma. Così potevasi far variare la larghezza della D_2 da $\frac{1}{20}$ ad $\frac{1}{4}$ della distanza degli assi delle D.

Non è facile ottenere costante quella larghezza, ma con un po' di cura, sopratutto evitando ogni corrente d' aria, eccettuate quelle dovute alla fiamma stessa, si arrivava ad ottenere per qualche minuto quella costanza, almeno per le righe o molto larghe o molto strette.

La diminuzione della larghezza delle righe D era accompagnata, per qualunque angolo dei nicol, da un restringimento simultaneo delle linee oscure e luminosepro dotte dal campo. Da alcune determinazioni, però non molto concordanti, sopratutto per il caso in cui la larghezza delle righe non era molto grande, si è avuto che la distanza dell' asse di ciascuna linea chiara od oscura dall' asse della corrispondente riga di assorbimento era presso a poco proporzionale alla larghezza della riga stessa. Riducendosi troppo questa larghezza, le corrispondenti linee chiare ed oscure si stringevano e si addossavano talmente l' una all' altra, che non era più possibile distinguerle, almeno coll' ingrandimento impiegato. Fin a quando però il fenomeno potea essere ancora osservato, il numero delle linee chiare ed oscure restava lo stesso ed i mutamenti d' aspetto del campo luminoso al diminuire della larghezza delle righe d' assorbimento, potean paragonarsi a quelli che si sarebbero avuti se l' aspetto del campo dell' oculare fosse stato dipinto su di una lamina elastica stirata, e della quale si fosse fatto diminuire lo stiramento perpendicolarmente alla direzione delle righe.

Secondo questa esperienza, al diminuire della larghezza delle righe di assorbimento per ogni valore di λ diminuirebbe la rotazione assoluta ϱ del piano primitivo di polarizzazione mentre crescerebbe il rapporto $\frac{\Delta\varrho}{\Delta\lambda}$.

Influenza dell' intensità del campo. — Con dispositivo sperimentale assai facile ad immaginarsi, cioè servendoci di una derivazione con interruttore a mercurio, potea farsi mutare bruscamente l' intensità della corrente dell' elettrocalamita così da ottenere un campo o di 2400, o di 4500 unità. Non abbiamo fatto sinora determinazioni quantitative, pure abbiamo potuto nettamente vedere che al crescere della intensità del campo le linee a questo dovute si slargavano tutte, cioè l' azione del vapore metallico si estendeva a luci che nello spettro occupavano regioni sempre più lontane dagli assi delle righe.

L' aumento dell' intensità del campo produceva perciò un effetto analogo a quello dovuto all' aumento della densità del vapore di sodio. Aprendo e chiu-

[1] Wied. Ann., vol. XXXIV, pag. 79.

dendo successivamente il circuito derivato, le linee oscure e luminose si slargavano e stringevano come animate da un movimento oscillatorio perpendicolare alla loro direzione.

Esperienze con cloruro di litio. — Alcune esperienze, identiche alle precedenti, furono fatte con cloruro di litio. Ne fu studiato il comportamento della riga rossa, ($\lambda = 0{,}00067082$) la quale per la sovrapposizione del rosso del secondo sul violetto del terzo spettro si vedea violetto su fondo porpora.

Non ci riuscì di potere ottenere questa riga molto slargata; la massima larghezza ottenuta fu per essa di circa un nono della distanza degli assi delle D. In scala molto ridotta questo corpo ci diede i medesimi risultati ottenuti col sodio. Ci riserbiamo del resto di tornare a studiare questo comportamento ottico nel campo magnetico, non solo pel litio, ma anche per altri metalli.

Il professore Righi ha pubblicato (1) qualche mese fa delle eleganti esperienze, in alcune delle quali si dimostra che un fascio di luce solare o elettrica, estinto pel passaggio attraverso a due nicol incrociati, passa invece in parte per l' analizzatore, se fra i due nicol si trovino vapori di sodio sottoposti all' azione di un campo magnetico parallelo alla direzione del fascio. Alla luce che passa corrisponde un numero di vibrazioni quasi identico a quello della luce di emissione del sodio.

Secondo il Righi questo fatto sarebbe una conseguenza del fenomeno di Zeemann, ed egli anzi consiglia questa esperienza per mostrare lo effetto Zeemann, anche impiegando campi magnetici relativamente deboli. A noi sembra però che la grande quantità di luce gialla che attraversa i nicol incrociati delle esperienze del Righi per la massima parte e quasi in totale, almeno nel caso di fiamme ricche di sodio, sia piuttosto quella stessa che nelle nostre esperienze comparisce nello spettro quando si eccita il campo magnetico, e che è dovuta ad un fenomeno il quale è diverso da quello scoperto dallo Zeemann.

(1) Rend. d. Acc. d. Lincei, serie 5ª, vol. VII, fasc. II, pag. 41.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 dicembre 1898.

Presidenza del Socio anziano A. Betocchi.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulle macchie, facole e protuberanze solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano nel 3° trimestre del 1898.* Nota del Socio P. Tacchini.

Ho l'onore di presentare all'Accademia i risultati delle osservazioni solari fatte nel 3° trimestre dell'anno corrente all'Osservatorio del Collegio Romano. Le condizioni dell'atmosfera, come quasi sempre avviene per il clima di Roma, furono assai favorevoli, così che il numero dei giorni utilizzati in questo genere di osservazioni risultò rilevante, come nel 1887, cioè di 88. Ecco i risultati per le macchie e per le facole:

1898

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi di macchie	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Luglio. . . .	30	1,53	1,80	3,33	0,47	0,00	0,63	9,47	78,24
Agosto . . .	28	4,89	7,00	11,89	0,14	0,00	2,18	44,78	91,62
Settembre. .	30	3,27	7,13	10,40	0,00	0,07	1,83	59,47	64,14
3° Trimestre	88	3,19	5,27	8,47	0,21	0,02	1,53	37,75	76,10

In questo trimestre il numero medio per giorno delle macchie e dei fori è un poco superiore a quello trovato per la precedente serie, ma nel com-

plesso il fenomeno delle macchie solari presenta una diminuzione in confronto del 2° trimestre 1898, in quanto che il numero delle giornate senza macchie e senza fori risulta maggiore e minore il numero dei gruppi di macchie. La maggiore estensione media delle macchie è dovuta al fatto singolare, per l'epoca attuale di minima attività solare, del bel gruppo osservato nella prima metà del Settembre. Esso comparve al bordo est il giorno 3 di detto mese e allora era visibile la sola macchia più grande alla latitudine di — 12°. Il 5 detta macchia vedevasi accompagnata da due più piccole e 3 fori e il gruppo si estendeva in latitudine fra — 10°,8 e — 15,9. Il 9 di settembre il gruppo era bipartito dal meridiano centrale, risultava formato di 4 macchie e 9 fori e sottendeva nel senso del parallelo un angolo di 4',75, cioè più di $^1/_4$ del raggio del disco ed era visibile con un semplice binocolo. Il 15 il gruppo era al tramonto, ma anche al bord ovest come in quello est la cromosfera non presentò nulla di rimarchevole.

Per le protuberanze il numero delle giornate di osservazione fu pure rilevante, ma l'atmosfera poco chiara, come è stato rilevato da altri osservatori.

1898

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media delle massime altezze	Massima altezza osservata
Luglio. . . .	29	2,10	29",6	1°,0	32",5	60"
Agosto . . .	27	2,85	33,7	1,1	39,2	84
Settembre. .	25	4,80	36,1	1,3	44,1	122
3° Trimestre	81	3,19	33,0	1,1	38,3	122

In questo bimestre si verificò un leggero aumento nel fenomeno delle protuberanze solari in confronto del trimestre precedente, con un massimo secondario nel mese di Settembre.

Le osservazioni furono fatte da me in 75 giornate e nelle rimanenti dai sigg. Palazzo e Vezzani.

Astronomia. — *Sulle Leonidi e Bielidi del Novembre 1898.* Nota del Socio P. Tacchini.

L'osservazione delle Bielidi era stata raccomandata per il giorno 24 Novembre, subito dopo il tramonto del sole fin verso le 22^h. Io non mancai di osservare attentamente il cielo dalla parte di levante; dalle 17^h alle 19^h l'atmosfera fu quasi sempre libera da nubi, ma il fenomeno può dirsi che

mancò intieramente; dalla 19^h alle 21^h il cielo fu ad intervalli in parte sereno, ma anche in quel periodo di tempo non osservai che una sola meteora e debole. Il risultato delle mie osservazioni fu pure negativo per le notti dei giorni 13, 14 e 15, mentre si sperava di vedere una pioggia abbondante di stelle filanti, così che vi è molto da dubitare per il ritorno di una grande pioggia di meteore nel 1899 paragonabile a quella del 1866.

Astronomia. — *Osservazioni sopra gli ultimi pianetini intrajoviali.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Nell'ultima mia Nota sopra questo argomento, che ebbi l'onore di presentare all'Accademia il 5 dicembre 1897, diceva che 425 pianetini fra Marte e Giove erano rappresentati da elementi ellittici ed avevano numero d'ordine; oggidì siamo saliti a 436, compreso il pianeta intramarziale DQ 1898, di cui ho riferito in una mia Nota nella seduta di Novembre scorso. A questi 436 debbonsi aggiungere 12 pianetini, per i quali mancarono nel passato elementi sufficienti per il calcolo dell'orbita ellittica, e non vennero numerati definitivamente. Il pianeta DG 1897 venne identificato per il perduto Menippe (188); finalmente 7 vennero scoperti nell'ultimo bimestre e sono in corso di osservazione e di conteggio. Il numero totale quindi dei pianeti trovati fra Marte e Giove è 454, e uno fra la terra e Marte coll'afelio al di là di Marte, cioè il DQ 1898 (433). Fra questi, 7 sono perduti da lunghissimo tempo, cioè (99), (132), (155), (156), (157), (193) e (220). Molti altri, la cui scoperta è di data più recente, hanno elementi assai difettosi, ma adagio, adagio si vanno riacquistando.

Di alcuni degli ultimi scoperti potei fare qualche osservazione, che qui riferisco, dopo il (429) DL 1897, del quale è fatto cenno nella mia Nota sopracitata.

Pianeta DP 1898. Gr. 11.0.

1898 Luglio 20	$11^h45^m54^s$	RCR.	α app.:	$20^h8^m21^s.22$ (8.720_n);	δ app.:	— 10° 7′ 1″.0 (0.841)
» » 23	9 36 3	»	»	: 20 5 45 43 (9.419_n);	»	— 9 55 26 4 (0.827)

Questo pianeta non porta numero, perchè il materiale di osservazione riuscì insufficiente al calcolo degli elementi.

Pianeta intramarziale DQ (433) Gr. 11.0.

1898 Sett. 6	8^h49^m 7^s	RCR.	α app.:	$20^h49^m16^s.76$ (9.030_n);	δ app.:	— 6°19′18″.4 (0.816)
» » 8	8 56 8	»	»	: 20 46 58 01 (8.886_n);	»	: — 6 19 45 6 (0.817)
» » 21	9 8 29	»	»	: 20 37 8 10 (8.823);	»	: — 6 21 12 1 (0.817)
» Ott. 8	6 45 0	»	»	: 20 37 30 69 (8.916_n);	»	: — 6 7 31 0 (0.773)

Pianeta DR (434) Ungaria (12.0).

1898	Sett.	13	$9^h15^m14^s$	RCR.	α app.:	$23^h46^m17^s.88$	(9.493_n);	δ app.:	— $0°28'45''.4$ (0.772)
»	»	15	11 13 48	»	»	: 23 44 42 51	(8.988_n);	»	: — 1 24 13 0 (0.781)
»	»	16	11 26 26	»	»	: 23 43 55 44	(8.813_n);	»	: — 1 50 55 2 (0.784)
»	»	19	12 1 23	»	»	: 23 41 36 74	(8.448);	»	: — 3 11 3 3 (0.795)
»	Ott.	20	10 53 17	»	»	: 23 26 42 48	(9.211);	»	: — 13 50 35 3 (0.856)

Pianeta DS (435) (11.0).

1898	Sett.	15	$13^h11^m56^s$	RCR.	α app.:	$23^h39^m33^s.78$	(9.136);	δ app.:	— $4°\ 8'37''.9$ (0.800)
»	»	16	8 29 34	»	»	: 23 38 52 09	(9.538_n);	»	: — 4 12 7 7 (0.790)

Pianeta DU (12).

1898	Nov.	12	$9^h40^m10^s$	RCR.	α app.:	$2^h45^m46^s.45$	(9.275_n);	δ app.:	+ $15°23'31''.8$ (0.610)
»	»	13	8 36 20	»	»	: 2 44 49 11	(9.460_n);	»	: + 15 21 52 1 (0.730)
»	»	15	12 23 45	»	»	: 2 42 41 31	(9.200);	»	: + 15 18 10 7 (0.606)
»	»	16	9 37 14	»	»	: 2 41 49 99	(9.197_n);	»	: + 15 16 42 8 (0.606)

Gli ultimi scoperti fotograficamente, cioè DV, DW, DX, DY, DZ ed EA, non vennero osservati per il persistente cielo coperto.

Il dott. V. Cerulli continua a Teramo ad osservare il DQ 1898, e l'ultima sua posizione è dell' 1 Dicembre. La seconda mia orbita, riportata nella mia Nota, di quell' interessantissimo pianeta, aberra attualmente di circa -2^s. È sperabile che il chiarissimo astronomo Abruzzese possa continuare ad osservare il pianeta anche nel prossimo Gennaio, essendo imperioso di possedere osservazioni su un intervallo di almeno cinque mesi per poter determinare i più probabili elementi ellittici, i quali debbono servire per le osservazioni che si potranno fare nel Novembre 1900.

Fisica terrestre. — *Osservazioni di temperatura e del colore delle acque fatte nell'Adriatico e nel Jonio.* Nota riassuntiva di A. Riccò e G. Saija.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Paleontologia. — *Sopra un nuovo genere di Brachiopodi proveniente dai calcari con Fusulina della Sicilia.* Nota del Socio Gaetano Giorgio Gemmellaro.

Nei calcari con *Fusulina* della Sicilia si trova un gruppo di Brachiopodi che si allontana dai generi conosciuti.

Le specie, appartenenti a questo nuovo genere, che chiamo *Rostranteris*, sono finamente punteggiate, per lo più piccole, piriformi, o ovali, o con contorno pentagonale e generalmente plicate verso la fronte. Il loro apice è più o meno curvato, e talvolta così fortemente da rendere la conchiglia gibbosa; esso è

troncato da un forame con contorno strettamente ellittico, terminante a forma di doccia che nasconde il deltidio, e non di raro l'apice della valva dorsale.

Esse mancano di lamine dentali e settali. La loro piastra cardinale è estremamente ridotta, e limitata alla parte superiore dalle pareti interne delle fossette dentali, talchè resta sulla linea mediana della valva dorsale uno spazio libero. Il loro apparecchio brachiale incomincia dalla estremità superiore della parete interna delle fossette dentali. Le lamine crurali, un poco divergenti, hanno sul loro lato ventrale le punte crurali grandi, alte e convergenti fra di loro. Alle crura fanno seguito le lamine discendenti che sono arcuate; esse si dilatano, si piegano gradatamente verso la valva ventrale e formano sulla linea mediana una lamina verticale lunga e prominente che termina alle sue estremità a punta; una di esse diretta verso la fronte e l'altra verso l'apice.

Le impronte muscolari sono lunghe, strette e situate ai lati della linea mediana. Esse incominciano sotto gli apici delle valve e terminano verso i due terzi della loro lunghezza. Quelle della valva dorsale sono leggermente divergenti.

Questo nuovo genere appartiene alla famiglia delle *Terebratulidae* ed ed ha dei rapporti di affinità coi generi *Juvavella*, *Nucleatula* e *Centronella*.

Dei due primi generi non si conosce quale sia la forma e quale il sito delle impronte musculari; nè si sa, se essi siano provvisti di lamine dentali e settali; però si conosce il loro apparecchio brachiale. Esso nelle *Juvavelle* ([1]) è cortissimo da non oltrepassare il quarto della lunghezza della loro valva dorsale, e nelle *Nucleatule* è un poco più lungo e frangiato. Sì nelle une che nelle altre le lamine discendenti, che sono appena arcuate, ad una certa distanza dalle punte crurali si curvano in modo rapido, e, camminando parallelamente alla fronte, formano sulla linea mediana la lamina verticale appuntita nell'una e nell'altra estremità. L'apparecchio brachiale di queste *Terebratulidae* triasiche ha una certa analogia con quello dei *Rostranteris*, ma non una identicità generica.

Quello delle *Centronelle* gli rassomiglia molto di più; però queste sono provviste di lamine dentali e settali, la loro piastra cardinale è sviluppata, triangolare e spesso forata al centro e il loro apice configurato diversamente. Le differenze, quindi, che passano fra i *Rostranteris* e questi generi sono notevoli. Quelle fra i *Rostranteris* e le *Juvavelle* e le *Nucleatule* sono maggiori di quelle che si notano fra essi e le *Centronelle*; ma le differenze fra questi generi essendo essenziali, non autorizzano a riunire le specie provenienti dai calcari con *Fusulina* della Sicilia neppure con queste.

([1]) Bittner, *Brachiopoden der alpinen Trias*, pag. 206 a 210, tav. VII, fig. 1 a 20, Wien, 1890.

Fra le *Terebratulidae* vi sono i *Dialasma* e le *Terebratule* (s. tr.) che differiscono fra di loro, perchè i primi sono provvisti di lamine settali e dentali. Le *Centronelle* stanno ai *Rostranteris* per le loro differenze anatomiche, come questi due generi stanno fra di loro; inoltre in quanto alla loro età si trovano in una formazione geologica molto meno antica di quelle, da cui provengono le *Centronelle*.

Le specie appartenenti al genere *Rostranteris* sono parecchie. Esse si incontrano frequentemente nei calcari con *Fusulina* dei dintorni di Palazzo-Adriano nella provincia di Palermo.

Zoologia medica. — *Il ciclo evolutivo degli emosporidi.* Nota preliminare del Socio B. Grassi e di A. Dionisi.

Punto di partenza delle nostre considerazioni è stato lo studio fatto da uno di noi delle due specie di ematozoi dei pipistrelli [1], una somigliante per i criterî morfologici al parassita della febbre quartana e l'altra a quello delle febbri estivo-autunnali.

Il parassita, morfologicamente analogo a quello della febbre quartana, si rinviene di regola in scarso numero, specialmente allo stadio di forma adulta e di grosso corpo pigmentato libero; scarsissime sono le forme giovani.

Era verosimile pensare, per analogia col ciclo evolutivo del parassita dell'uomo, che contemporaneamente, o qualche tempo dopo, si dovesse trovare insieme alle forme descritte la fase di riproduzione del parassita. Ma esami ripetuti per 10, e in alcuni individui, anche per 15 giorni di seguito, non fecero constatare la presenza nel sangue di forme di riproduzione; in parecchi individui fu rimarcata la frequenza relativa di forme pigmentate libere colle caratteristiche note degenerative; ma le forme adulte e i grossi corpi liberi pigmentati rimasero costantemente alla stessa fase di sviluppo. Si affacciava perciò alla mente il problema: quale è il significato di tali forme adulte e dei grossi corpi liberi pigmentati, che in alcuni individui costituiscono il solo reperto parassitario, che non sporulano nel sangue periferico, nè negli organi, come si è potuto constatare con l'autopsia di parecchi animali morti dopo 8 a 15 giorni di cattura?

Si poteva supporre, che essendo gli osti in letargo, il ciclo evolutivo del parassita si arrestasse a una certa fase di sviluppo e che, cessato il letargo, riprendesse il suo normale svolgimento.

[1] A. Dionisi, *I parassiti endoglobulari dei pipistrelli*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, Seduta del 6 novembre 1898, vol. VII, 2° semestre, serie 5ª, fasc. 9.

Si fecero perciò uscire dal letargo i pipistrelli infetti, pensando che l'ulteriore sviluppo dovesse verificarsi. Ma esso non si verificò in alcun individuo.

Poteva supporsi che il ciclo di sviluppo di questo parassita del pipistrello fosse lungo, ma la durata delle ricerche è stata tanta da togliere ogni fondamento a siffatta supposizione.

D'altronde è noto che nell'infezione umana si trovano delle forme analoghe per i caratteri morfologici e che non sporulano mai.

Difatti si rileva sia dalle osservazioni di parecchi autori, tra i quali Bastianelli e Bignami, sia dallo studio fatto da uno di noi (Dionisi) di parecchi casi di infezioni primaverili, determinate da parassiti terzanarî e quartanarî, che tali forme, che non sporulano mai, appaiono per lo più nelle infezioni primitive dopo alcuni accessi, rimangono ospiti del sangue umano per un periodo variabile, secondo gli individui, anche quando il periodo febbrile è finito e resistono spesso all'azione della chinina. È noto inoltre che nelle infezioni recidive si trovano fin dai primi accessi insieme coi parassiti in varî stadî di sviluppo.

A questo comportamento di tali forme è da aggiungere, come risulta da altre osservazioni fatte da uno di noi [1], che nell'organismo esse permangono come ospiti innocui, potendosi, malgrado la loro presenza, ricostituire al normale il numero dei globuli rossi e l'individuo guarire dell'infezione.

Certamente le forme in discorso, a lungo andare, possono morire, come, secondo recenti osservazioni del Dionisi, avviene anche nella fase giovanile del parassita estivo autunnale; ma ciò non implica punto che esse siano già in degenerazione, moribonde o morte.

E ciò asseriamo sia per i loro caratteri morfologici, sia per la evidente analogia che esse hanno colla fase semilunare del parassita delle febbri estivo-autunnali, fatto già notato da uno di noi nel 1890 [2] e da Bastianelli e Bignami.

Or bene le ricerche fatte da uno di noi insieme a G. Bastianelli e ad A. Bignami e comunicate all'Accademia contemporaneamente alla presente Nota, dimostrano che le forme semilunari, le quali pure, se restano nel sangue umano, a lungo andare, finiscono a morire, si sviluppano ulteriormente fuori del corpo dell'uomo, nel corpo della zanzara [3].

[1] A. Dionisi, *Variazioni numeriche dei globuli rossi e dei globuli bianchi in rapporto col parassita della malaria.* Roma 2 luglio 1890. Sperimentale, anno XLV (Memorie originali, fasc. 3°).

[2] A. Dionisi, loc. cit., pag. 47.

[3] Uno di noi (Grassi) ha sostenuto nel 1890 che le semilune rappresentassero un parassita a sè basandosi essenzialmente sulla impossibilità di ammettere che esse fornite di un bel nucleo, fossero sterili e che potessero passare nell'ambiente esterno, mancando di capsula. Siffatta opinione cade dopochè egli ha dimostrato con Bastianelli e con Bignami che le semilune vanno avanti a svilupparsi nel corpo della zanzara.

È perciò lecito indurre dalle precedenti premesse che le forme adulte e i grossi corpi liberi pigmentati dei pipistrelli e le forme analoghe dell'uomo rappresentino la fase del parassita, capace di continuare il suo sviluppo nelle zanzare.

Nel lungo periodo di tempo, circa un mese, nel quale uno di noi ha seguito lo sviluppo d'un altro parassita dei pipistrelli, analogo per caratteri morfologici e di struttura al parassita estivo-autunnale dell'uomo, si sono notati i fatti seguenti:

L'osservazione è stata compiuta in 4 individui, uno dei quali morì dopo un mese di osservazione. Dei 4 individui, uno presentava nel sangue reperto abbondantissimo, due reperto discreto, e uno reperto scarsissimo. Le forme parassitarie descritte (1) si sono mantenute presso a poco nelle stesse proporzioni, e se ne sono osservate due varietà principali ,alcune piccolissime, discoidi o anulari con vivaci movimenti ameboidi, altre più grandi, immobili, occupanti circa i $^2/_3$ del globulo rosso, che sono venute aumentando durante il periodo di osservazione. È notevole il fatto che negli individui con reperto scarsissimo prevalevano le forme grandi. Qualche volta era dato vedere nello stesso globulo rosso una o più forme piccole mobili e una forma grande immobile tripla e anche quadrupla delle altre (2).

Tra tutte queste forme non si è mai osservata alcuna figura di segmentazione, tanto nel sangue periferico degli individui vivi, che negli organi del pipistrello morto, accuratamente ricercati. Solo in questo è stato notato che il sangue estratto dal miocardio conteneva maggior numero di forme parassitarie.

Ora è da notare, che questa specie di pipistrelli era stata catturata quando non era ancora caduta in letargo e assumeva nutrimento; perciò non si può invocare lo stato letargico come ostacolo alla moltiplicazione del parassita: durante la prigionia gli individui sono tutti caduti in letargo, dal quale sono stati fatti uscire artificialmente, e il reperto del sangue è rimasto presso a poco lo stesso.

Tenendo presente questi reperti e i fatti precedentemente esposti per l'altra forma di parassita dei pipistrelli e per i parassiti della malaria dell'uomo, è naturale ammettere che *anche le forme grandi non pigmentate, immobili, che rimangono per molto tempo immutate, rappresentano la fase del parassita, capace di continuare il suo sviluppo in altro oste.*

Occorre soggiungere che il parassita dei pipistrelli in discorso per la mancanza di pigmento ricorda il *pirosoma bigemino* del bue. Orbene, se a questo volgiamo la nostra attenzione, notiamo che anche di esso sono nettamente distinguibili due forme, una delle quali discoide, con movimenti ame-

(1) A. Dionisi, *I parassiti endoglobulari dei pipistrelli*, v. lav. cit.
(2) A. Dionisi, v. l. c., pag. 257.

boidi, che aumenta di volume e l' altra a forma di pera immobile, della quale spesso si rinvengono nello stesso globulo rosso due individui (Celli). Si può supporre che questa rappresenti la forma destinata a svolgersi ulteriormente nella zecca. E questa interpretazione è d'accordo col fatto che in casi gravissimi e rapidamente mortali, come Celli ha potuto quest'anno constatare con uno di noi, non si trovano forme parassitarie nel sangue periferico, nè negli altri organi, ed è invece dato di constatare forme di sporulazione nel sangue del miocardio e forme giovani, senza una delle forme che richiamò da principio l'attenzione degli scopritori: intendiamo riferirci alla così detta forma a pera [1].

Forme che non sporulano sono state descritte esattamente sopratutto da Celli nell' *Haemamoeba* degli uccelli. Egli le ha giustamente paragonate alle suddette forme della terzana e della quartana e alle semilune delle febbri estivo-autunnali. Anche la *Laverania* [2] degli uccelli presenta forme che non sporulano mai [3].

Tenendo presenti tutte le precedenti premesse e altre osservazioni del Grassi e della scuola di Roma, che qui sarebbe troppo lungo riferire, richiamando che sull' esattezza delle osservazioni soprariferite, per quanto in gran parte lasciate senza spiegazione, o male o imperfettamente spiegate, non può cadere alcun dubbio, e aggiungendo infine le ricerche di Ross, bellissime per quanto deficienti dal lato zoologico, sull' *haemamoeba* degli uccelli e del Mac Callum sulle semilune dell' uomo e sulla *Laverania* degli uccelli, possiamo definire il ciclo evolutivo degli Emosporidi, con una formola, che si accorda brillantemente cogli studî recenti fatti su altri sporozoi.

Gli *Emosporidi* (parassiti malarici dell'uomo e degli animali) [4] *sono parassiti con ospite intermedio e a generazione alternante.*

[1] A proposito di queste forme parassitarie senza pigmento, riscontrate da Smith e Kilborne nel bue, e da uno di noi in una specie di pipistrello, ci sia lecito ricordare l'affinità, che pare abbiano tali forme parassitarie colle forme parassitarie sporulanti senza assumere pigmento, da Marchiafava e Celli riscontrate raramente nel sangue dell'uomo e da Grassi in un falco. È giustificato il sospetto che l' infezione determinata da questi parassiti del pipistrello, dell' uomo e del falco sia inoculata da acaridi, come quella dei buoi, la quale viene notoriamente inoculata dalla zecca.

All' altro parassita dei pipistrelli, per ragione di distribuzione geografica, si è tentati di rapportare il *Culex malariae*.

[2] Il Grassi non crede giustificato il genere *Proteosoma* del Labbé, ed osserva che le leggi di priorità impediscono di sostituire al nome *Laverania* il nome *Halteridium*.

[3] La *Laverania* deve presentare, oltre alle due forme che ha descritto il Mac Callum, una terza, quella sporulante nel corpo dell' uccello.

[4] Qui e più avanti segniamo tra parentesi e con caratteri differenti la nomenclatura usata dai medici.

L'ospite intermedio (1ª fase del parassita) è il vertebrato a sangue caldo [1]; *l'ospite definitivo (2ª fase del parassita) è l'invertebrato (Dittero, Acaride).*

Nel vertebrato a sangue caldo gli Emosporidi passano la fase ameboidea: in questa fase si moltiplicano per un numero indefinito di volte, cioè le forme ameboidi, giunte a certe dimensioni si dividono ciascuna in un certo numero di amebule (processo di sporulazione). *Caratteristica si è la mancanza di capsula sì nelle forme ameboidi in via di riproduzione che nelle amebule che ne risultano. Questa fase, che si riscontra nel vertebrato, può definirsi asporulare, se si dà alla parola spora il senso ordinario.*

Già dopo pochi giorni che si è iniziata la fase in discorso, compaiono delle forme, che non sono più capaci di sporulare nel vertebrato. (Forme adulte terzanarie e quartanarie dell'uomo, sterili, che non sporulano nell'uomo, che si possono flagellare, che degenerano. Grossi corpi pigmentati liberi della terzana e della quartana. Semilune delle febbri estivo-autunnali dell'uomo. Forme adulte degli uccelli e dei pipistrelli, che non sporulano e paragonabili a quelle terzanarie e quartanarie dell' uomo. Forme immobili, non pigmentate del pipistrello. Forme immobili del bue *Halteridium* ialino e granuloso del Mac Callum).

Queste forme sono da considerarsi come gameti, sforniti di capsula e distinti in due sorta: denominiamo l' una macrogamete e l' altra microgametogena (forme flagellantisi).

Se le due forme in discorso restano nel corpo del vertebrato, finiscono per morire. Se invece passano nell' intestino medio [2] *dell' oste definitivo i microgameti* (flagelli forniti di cromatina) *diventano liberi: un microgamete (spermoide) si copula con un macrogamete (ooide), producendosi così un zigote mobile, che entra nelle pareti dell'intestino medio* [3]. *Quivi ingrandisce, s' incista e produce sporoblasti e forme che per ora diremo spore.*

Evidentemente la fase nell' invertebrato è superiore alla fase nel vertebrato, e perciò abbiamo detto che l' invertebrato giudicasi oste definitivo e il vertebrato oste intermedio.

Riconosciuto questo ciclo, che nei particolari dovrà essere ulteriormente precisato, abbiamo la spiegazione naturale di tutti i fatti finora noti. Questa spiegazione indica la via per gli esperimenti, diretti a determinare gli osti definitivi. Essi riesciranno inconcludenti, ove non siano presenti i gameti nel sangue periferico.

[1] Sugli Emosporidi dei Vertebrati a sangue freddo le cognizioni sono molto imperfette.

[2] Mancano ricerche sul pirosoma dei buoi e forme affini del pipistrello, dell' uomo e del falco.

[3] Questo zigote, nel caso delle febbri estivo autunnali, viene ad essere nient'altro che una semiluna fecondata da un flagello ed è così poco trasformata che mostra esattamente, quando è già dentro le pareti dell' intestino, il pigmento caratteristico della semiluna (Bastianelli, Bignami e Grassi).

Basta tener presente il ciclo in discorso per acquistare la persuasione che non si dà malaria senza ditteri, o acari succhiatori di sangue.

Ci mancano però ancora alcuni anelli della catena, vale a dire, mentre è stabilito per le ricerche di uno di noi con Bignami e Bastianelli nell' emameba dell' uomo e per le ricerche di poco precedenti di Ross nell' emameba dell' uccello, che peculiari insetti inoculano i parassiti malarici e che i parassiti malarici succhiati col sangue da peculiari insetti in essi si sviluppano ulteriormente, non sappiamo esattamente che cosa succeda delle spore, sviluppate nel corpo dell' insetto. Ross crede che passino direttamente nelle glandole salivari, ma nè le sue osservazioni, nè i suoi esperimenti reggono alla critica, mancando la prova che *le spore, da Ross riscontrate nelle glandole salivari, provenissero dal parassita maturato nel corpo dell' individuo nel quale esse erano presenti.*

Nello stato attuale delle nostre cognizioni sono lecite tre ipotesi:

1) che le spore passino direttamente nelle glandole salivari dell' insetto, in cui si sono prodotte;

2) che vengano trasmesse nelle uova alla prole;

3) che le larve, mangiando i detriti organici, prodottisi dal corpo della loro madre, morta vicino ad esse, assumano le spore, che poi trasmetteranno all' uomo, quando saranno diventati insetti perfetti.

Zoologia medica. — *Coltivazione delle semilune malariche dell' uomo nell' Anopheles claviger Fabr. (sinonimo: Anopheles maculipennis Meig.)* [1]. Nota preliminare di G. Bastianelli, A. Bignami e B. Grassi, presentata dal Socio B. Grassi.

Ci siamo proposti di studiare i rapporti delle singole zanzare colle singole specie di parassiti malarici dell' uomo e, avuto riguardo alla complessità dell' assunto, abbiamo trovato opportuno di lavorare assieme.

Come primo risultato delle nostre ricerche possiamo annunciare che abbiamo potuto seguire con tutta sicurezza parecchie fasi di sviluppo dei corpi semilunari nello spessore dell' intestino medio di parecchi *Anopheles claviger*, tenuti a temperatura opportuna, ai quali avevamo fatto succhiare sangue di individui affetti di forme malariche estivo-autunnali. Le notevolissime fasi in discorso trovano riscontro in quelle descritte dal Ross (2° e 3° giorno) per il proteosoma (emameba) degli uccelli.

In una camera dove degevano quattro malarici (affetti tutti di febbri estivo-autunnali?) abbiamo raccolto:

sei *Culex pipiens*;
un *Anopheles nigripes*;
quattro *Anopheles claviger*.

[1] Inviata il 28 novembre 1898.

L'esame di questi Culicidi risultò negativo, tranne per due *Anopheles claviger*, nei quali trovammo stadî di sviluppo ulteriore, corrispondenti a quelli descritti dal Ross per il proteosoma degli uccelli (4° giorno).

Verisimilmente i due *mosquitos* colle ali *macchiate* [1] nei quali il Ross in India trovò stadî di sviluppo simili a quelli del proteosoma (3° giorno circa) appartenevano pure alla specie *Anopheles claviger* Fabr. Il Ross però non avendo seguìto lo sviluppo di questi corpi, non poteva con sicurezza riferirli alle semilune, essendo anche possibile che i suoi due *mosquitos* prima di pungere l'uomo avessero già punto altro animale.

Negativi finora riuscirono molti altri tentativi di coltivare nell'*Anopheles claviger* i parassiti della civetta e dei piccioni.

Si noti infine che a Lentini (Sicilia) nell'ottobre e nel novembre scorso, pur infierendo la malaria, non si trovò nè *Culex penicillaris*, nè *Culex malariae;* gli *Anopheles claviger* invece erano straordinariamente abbondanti.

Aggiunta alla Nota precedente degli stessi Autori. — Essi hanno ottenuto una terzana doppia (terzana primaverile degli autori italiani) per solo effetto delle punture dell'*Anopheles claviger* Fabr. (circa un centinaio di individui presi nelle case di Maccarese) in uomo certamente non affetto da malaria e degente in un luogo certamente non malarico.

Essi hanno confermato i risultati delle precedenti culture e hanno ottenuto ulteriori stadî di sviluppo delle semilune dentro le tuniche intestinali dell'*Anopheles claviger*. In un individuo della stessa specie, preso in una camera dove degeva un uomo probabilmente affetto da febbri estivo-autunnali, si sono trovati stadî in cui il processo di sporulazione era già avanzato.

Recentissimamente hanno ottenuto uno stadio ulterioro: l'emosporidio è maturo ed è caratterizzato da una capsula sottile contenente un enorme numero di corpi filiformi, apparentemente immobili, molto delicati e una o parecchie masse amorfe. Quelli sono zoologicamente definibili sporozoiti; queste, *nucleus de reliquat* (corpi residuali della segmentazione).

Zoologia medica. — *Rapporti tra la malaria e gli artropodi.* Nota del Socio B. Grassi.

L'*Anopheles claviger*, cioè il zanzarone, già stato da me definito come vero indice, vera spia della malaria, essendosi dimostrato veramente come agente propagatore della malaria, io mi domando se esso sia il solo colpevole, ovvero se altre zanzare lo coadiuvino nella triste opera. Benchè ciò si

[1] Esistono in Europa cinque culicidi colle ali macchiate. Per l'India non conosciamo alcun dato.

possa risolvere soltanto cogli esperimenti in corso, credo fin d'ora opportuno richiamare l'attenzione sui seguenti fatti:

Dal 20 al 30 ottobre nei dintorni di Roma i *Culex penicillaris* e *malariae* andarono diradandosi e dal 10 novembre in poi quasi non punsero più: non potendosi ammettere che *tutti* i moltissimi casi di malaria, sviluppatisi dopo il 10 novembre fossero già in incubazione, sono inclinato a concedere grande importanza all'*Anopheles claviger*. Si trovarono però nei luoghi malarici anche rarissimi *Anopheles bifurcatus*, *A. nigripes*, *Culex spathipalpis* e non rari *Culex pipiens*. Questi due *Culex* erano però in generale meno rari nei luoghi non malarici.

Notevole è stata, in ottobre e in novembre, l'abbondanza dell'*Anopheles bifurcatus* nei dintorni di Sant' Eufemia di Calabria e dell'*Anopheles pictus* in parecchi altri luoghi gravemente malarici del Napoletano. Occorre perciò sperimentare anche con queste forme.

Il *Culex pipiens* presenta delle varietà e, come una di esse, io considero il *Culex rufus*.

Occorre tener presente anche queste varietà, perchè potrebbe darsi che taluna fosse specifica dei luoghi malarici e perciò sospetta.

Secondo le ricerche del Meinert, le larve d'*Anopheles* abitano le acque dormenti o a debole corrente con ricca vegetazione. Non ibernano, ma si trovano già larve semi-adulte a partire dalla metà di marzo nelle annate di temperatura mite.

In luglio e un po' più tardi nell' estate si trova una seconda generazione di larve adulte e infine nel 1882, annata la cui primavera fu precoce, furono trovate alla fine d' ottobre larve piccole, che certamente appartenevano ad una terza generazione e che dovettero morire tutte al comparire dei primi ghiacci.

Non fa d' uopo spendere parole per dimostrare la concordanza singolarissima tra le generazioni dell'*Anopheles claviger*, in parte da me pure osservate, e i periodi primaverile ed estivo-autunnale della malaria. Io ho trovato a Lentini alla fine di ottobre un' enorme quantità di *Anopheles claviger* provenienti dalla terza generazione. Quasi contemporaneamente verificavasi una grave recrudescenza della malaria.

Altro riscontro importantissimo.

Nell' Europa media l' *Anopheles claviger* è segnalato come pungente in primavera e per Lipsia, per esempio, sappiamo che il massimo della malaria coincide col mese di maggio. La femmina dell'*Anopheles claviger* iberna nelle nostre case, dove le si dovrebbe fare attivissima caccia.

La signorina Foà, nel laboratorio da me diretto, ha constatato che sulle vacche malate di febbre del Texas nella Campagna Romana, si trova in grande quantità il *Rhipicephalus annulatus* (Say), ossia la stessa specie che giuoca una parte fondamentale nella trasmissione della suddetta malattia negli Stati Uniti e che finora credevasi mancante sul continente italiano.

Matematica. — *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Il terremoto nell' isola di Haiti* (*Antille*) *del 29 dicembre 1897.* Nota del dott. G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Intorno alle $6^h \frac{1}{2}$ (t. m. l.) antimeridiane di detto giorno, una violentissima commozione sismica colpì la vallata del fiume Yaque, il quale scorre nella parte settentrionale dell' isola in direzione dall' ESE all' WNW chiuso tra due catene di montagne tra loro parallele; l' una, il Cibao, che resta dalla parte di mezzogiorno e costituisce la principale catena di montagne, l' altra, il M. Cristo, che resta verso il nord e divide l' anzidetta vallata dall' Atlantico. Gli effetti del terremoto furono maggiormente sensibili nel corso inferiore del fiume, dove, malgrado la grande intensità del fenomeno (grado IX-X della scala *De Rossi-Forel*), non si sono tuttavia avuti a deplorare grandi disastri, grazie alla costruzione in legno degli edifici. Tenuto conto delle relazioni che si hanno da varî punti dell' isola e dell' estensione che ha avuta la scossa, si può ritenere in cifra tonda per l' epicentro la posizione seguente:

lat. N $19^\circ \frac{1}{2}$, long. 71° W Greenwich.

A Santiago, che se ne troverebbe distare una trentina di km. verso l' ESE, e dove la più parte dei fabbricati sono costruiti in mattoni, i muri furono fortemente lesionati, ed alcuni edifici talmente danneggiati da doversi demolire. A Puerto-Plata, sull' Atlantico, a circa 40 km. verso il NE, si ruppero al momento della scossa i cavi sottomarini che vi fanno capo. A Port-au-Prince, a circa 170 km. verso il SW, non si ebbe alcun danno; ma il movimento dovette essere ancor sensibilissimo. Un sismografo *Cecchi*, installato all'Osservatorio del Collegio-Convitto *S. Marziale* di questa città, registrò un diagramma notevolissimo, della durata di un minuto e mezzo. All' isola Grande Turksisland, a più di 200 km. verso il N, la scossa fu lieve, ma ancora tale da far arrestare parecchi orologi. Basandosi sulle località più lontane conosciute, ove il movimento si rese più o meno sensibile alle persone, si può ritenere che sia stata non minore di 125000 km. quadrati la porzione della superficie terrestre posta in scuotimento dal terremoto.

Questa prima scossa fu seguìta da una quarantina di repliche di minor importanza durante lo spazio di circa un mese, dopo di che il suolo riacquistò la tranquillità abituale.

Le onde sismiche, provocate dalla prima scossa violenta, non solo influenzarono in modo notevolissimo un sismografo in azione a Toronto nel Canadà, ad una distanza di circa 2800 km. dal presunto epicentro, ma arrivate in Europa furono ancora capaci di perturbare, benchè lievissimamente, gli strumenti più delicati di varî Osservatorî, specialmente italiani, e perfino quelli di Nicolaiew, città della Russia, che se ne trova distare di quasi un intero quadrante terrestre. È stata vera fortuna che per questo terremoto siasi potuta conoscere l'ora esatta del fenomeno all'epicentro o quasi. Infatti, grazie alle indicazioni del sismografo *Cecchi* di Port-au-Prince, situato a non più di 170 km. dal presunto epicentro, e grazie all'esatto tempo campione che si può avere in detta città, provvista d'un cannocchiale meridiano e d'un pendolo siderale, è stato possibile di aver sicuro l'istante del principio della scossa. Paragonando questo dato prezioso con le ore relative al principio della perturbazione dei più sensibili strumenti in Europa, quali appunto si sono mostrati quelli degli Osservatorî d'Ischia e Catania, si arriva alla conclusione che le onde sismiche, le più veloci, si sono propagate fino in Italia con una velocità media e superficiale d'una diecina di chilometri al secondo. A queste onde, probabilmente le longitudinali considerate nella teoria dei corpi solidi elastici, han fatto seguito, come al solito, le caratteristiche ondulazioni del suolo a lento periodo, che ci sono ormai ben note per tanti altri terremoti precedenti. Nell'attuale terremoto, le più ampie di siffatte ondulazioni avrebbero viaggiato con una velocità media superficiale di circa 3 km. al secondo. Dunque i valori di queste velocità s'accordano abbastanza con quelli che noi stessi avemmo a trovare per il grande terremoto indiano del 12 giugno 1897 (1), sebbene in quell'occasione le onde sismiche fossero al confronto assai più pronunciate. Anzi, questa piccolezza appunto delle registrazioni, ottenutesi pel terremoto di Haiti, deve aver contribuito alla grande discrepanza tra i valori del periodo oscillatorio che figurano per i diversi Osservatorî, ciò che impedisce di calcolare la lunghezza raggiunta dalle più ampie ondulazioni del suolo a lento periodo, e per conseguenza di calcolare il sollevamento ed abbassamento alternativo prodottosi nella superficie terrestre al loro passaggio.

Ritengo utile di chiudere la presente Nota con la seguente riflessione. Se disgraziatamente non si fosse avuta l'ora di Port-au-Prince, località assai vicina all'epicentro, saremmo stati costretti di servirci dell'ora di Toronto come punto di partenza per il calcolo della velocità di propagazione delle onde sismiche fino in Europa. Orbene, se si confronta l'ora di Toronto con il principio dei sismogrammi dei più sensibili strumenti europei, si arriva a velocità straordinariamente elevate ed affatto inverosimili. Ciò dipende dal fatto che il sismografo di Toronto, a circa 2800 Km. dall'epicentro, non ha cominciato forse ad essere visibilmente influenzato che sotto l'influenza d'onde

(1) G. Agamennone, *Il terremoto nell' India del 12 giugno 1897 registrato in Europa*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. VII, seduta del 1 maggio 1898, pag. 265.

sismiche già dotate d' una certa intensità, mentre quelle più veloci, ma certamente più deboli, non hanno lasciato traccia di sè su tale strumento, probabilmente assai meno sensibile di quelli ora in uso in Europa, e specie in Italia. Un fatto analogo si verificò già pei terremoti dell' isola di Labuan del settembre 1897 (1) e sul quale io non mancai di richiamare l' attenzione, facendo vedere come le altissime velocità, che si ottenevano allora per le onde le più veloci, dipendessero probabilmente dall' aver presa, come punto di partenza, nei calcoli l' ora di Batavia, a circa 1600 km. dall' epicentro, ora ricavata da uno strumento (magnetografo) la cui sensibilità non può certo sostenere il paragone con i delicatissimi strumenti europei, quasi tutti costruiti espressamente per indagini sismiche. Adunque mi pare che l' esempio ora esposto per il terremoto di Haiti costituisca un buon appoggio per le deduzioni che io ebbi già a fare, or non è molto, nei Rendiconti di questa stessa Accademia circa la velocità di propagazione dei terremoti dell' isola di Labuan.

Queste sono le conclusioni più importanti a cui sono giunto in uno studio piuttosto esteso sul terremoto d' Haiti, che sarà fra poco pubblicato nel vol. IV del Bollettino della Società Sismologica Italiana.

Chimica. — *Sopra due altre desmotroposantonine* (2). Nota di A. Andreocci e di P. Bertolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

La *desmotroposantonina*, $C^{15}H^{18}O^{3}$, fusibile a 260°, che devia a destra il piano della luce polarizzata, con un potere rotatorio specifico di 110°, fu ottenuta per azione dell'acido cloridrico, o dell'acido bromidrico, sulla santonina (3). I due idracidi prima si addizionano alla santonina e poi se ne distaccano determinando la desmotropia dell'ossigeno cetonico in ossidrile terziario e fenico (4). L' attitudine della santonina di addizionarsi agli acidi energici e concentrati, supposta pel forte potere rotatorio della santonina negli acidi cloridrico e bromidrico (5), fu confermata col nitrato di santonina, $C^{15}H^{18}O^{3} . HNO^{3}$ (6).

L' *isodesmotroposantonina* $C^{15}H^{18}O^{3}$ fusibile a 189°, che devia a destra di 129°, fu ottenuta dalla desmotroposantonina trattata con potassa caustica a 210° (7).

Le due desmotroposantonine ridotte, con acido acetico e polvere di zinco, dànno rispettivamente i due acidi levogiri $C^{15}H^{20}O^{3}$: *desmotroposantonoso*,

(1) G. Agamennone, *I terremoti nell' isola di Labuan* (Borneo) *del 21 settembre 1897*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. VII, fascicolo del 18 settembre 1897, pag. 155.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica-farmaceutica della R. Università di Catania nell' ottobre 1898.

(3) A. Andreocci, Rend. Acc. Lincei (1893), serie 5ª, vol. II, 1° sem., pag. 328 e 494.

(4) A. Andreocci, Gazz. chim. ital. (1893), vol. XXIII, parte 2ª, pag. 474.

(5) Il potere rotatorio specifico della santonina in *cloroformio*, per $(\alpha)_D$, è — 171° (G. Carnelutti, e R. Nasini, Gazz., (1880), vol. X, pag. 526). In *alcool assoluto* è — 173°; in *acido cloridrico*, al 38 %, — 340°; ed in *acido bromidrico*, d. 1,38, — 346° (A. Andreocci, Atti Acc. Lincei, Classe scienze fisiche (1895), anno CCXCII, serie 5ª, vol. II, ecc. Gazz. (1895), vol. XXV, parte 1ª, pag. 465.

(6) A. Andreocci, Rend. (1896), serie 5ª, vol. V, 2° sem., pag. 309.

(7) A. Andreocci, Rend. (1893), serie 5ª, vol. II, 2° sem., pag. 175.

fusibile a 175°, che devia il piano della luce polarizzata di — 53°,3 ([1]); e *levo-santonoso*, fusibile a 179-180°, con potere rotatorio di — 74°,4 ([2]).

L'acido levo santonoso è l'isomero enantiomorfo del già noto acido *destro santonoso*, fus. a 179-80°, col pot. rot. di + 74°,8 ([3]); infatti unito a questo dà il *racemo* ([4]), che è identico all'altro, già noto, acido *santonoso inattivo*, fus. a 153° ([5]).

Uno di noi ([6]), con fatti numerosi, e considerazioni teoretiche, stabilì con tutta evidenza la stereoisomeria fra gli ultimi tre acidi santonosi ricordati; ritenne l'acido desmotroposantonoso per un quarto loro stereoisomero; considerò isomeri ottici anche le due desmotroposantonine, ne previde le corrispondenti agli acidi santonosi destro e racemo, come previde l'isomero enantiomorfo dell'acido desmotroposantonoso; e dimostrò la costituzione di questi composti e dei loro derivati. Infine tali studî messi in relazione con quello sul paradimetilnaftolo ([7]) confermarono, in un modo diretto, la formola data alla santonina da Cannizzaro.

Le seguenti formole di costituzione rilevano le relazioni della santonina colle desmotroposantonine e cogli acidi santonosi:

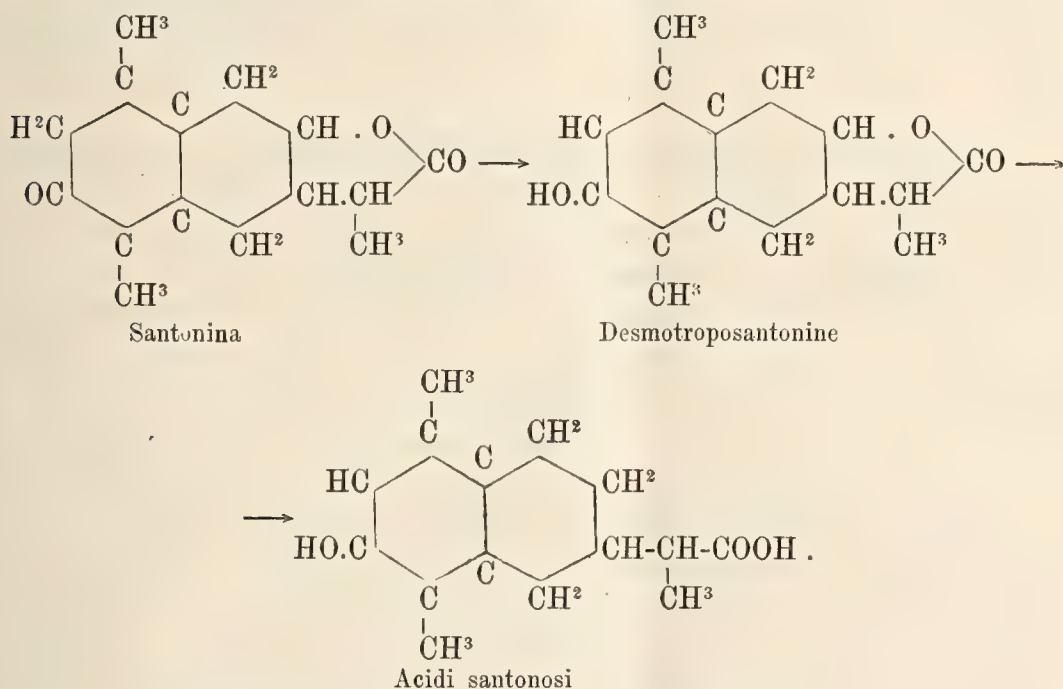
CH^3 | C, C, CH^2 | H^2C, CH . O, >CO → | OC, CH.CH | C, C, CH^2, CH^3 | CH^3

Santonina

CH^3 | C, C, CH^2 | HC, CH . O, >CO → | HO.C, CH.CH | C, C, CH^2, CH^3 | CH^3

Desmotroposantonine

CH^3 | C, C, CH^2 | → HC, CH^2 | HO.C, CH-CH-COOH . | C, C, CH^2, CH^3 | CH^3

Acidi santonosi

([1]) A. Andreocci, Rend. serie 5ª, vol. II, 1° sem., pag. 496.

([2]) A. Andreocci, Rend. serie 5ª, vol. II, 2° sem., pag. 179.

([3]) S. Cannizzaro e G. Carnelutti, Gazz. (1882), vol. XII, p. 393; A Andreocci, Gazz. (1895), vol. XXV, parte 1ª, p. 484.

([4]) A. Andreocci, Rend. serie 5ª, vol. II, 2° sem., pag. 180.

([5]) S. Cannizzaro e G. Carnelutti, loc. cit. pag. 400.

([6]) A. Andreocci, Gazz. vol. XXIII, parte 2ª, pag. 468; vol. XXV, parte 1ª, pag. 452, ed Atti Acc. Lincei 1895, serie 5ª, vol. II.

([7]) S. Cannizzaro ed A. Andreocci, *Sulla costituzione del dimetilnaftol proveniente dalla scomposizione degli acidi santonosi.* Atti Acc. Lincei, Mem. classe fisiche, ecc. serie 5ª, vol. II; Gazz. (1896), vol. XXVI, parte 1ª, p. 13.

Abbiamo creduto interessante di riprendere lo studio dell' azione degli acidi sulla santonina, tanto per determinare l' influenza sul potere rotatorio e possibilmente isolare i prodotti di addizione, quanto colla speranza di ottenere qualcuno degli stereoisomeri prevedibili in teoria delle due desmotroposantonine.

Le nostre prime ricerche hanno stabilito che il potere rotatorio della santonina anche negli acidi ortofosforico, solforico e nitrico è molto più forte di quello in solventi neutri, come risulta dal seguente specchio (1).

SOLVENTE	Concentrazione della soluzione per 0/0 in vol.	Temperatura	Lunghezza del tubo mm.	Deviazione osservata per $(\alpha)_D$	Potere rotatorio specifico	*Annotazioni*
Acido ortofosforico, dens. 1,697	3.0014	27°	220	— 21°.46	— 325°	La diminuzione del potere rotatorio della soluzione in acido ortofosforico è dovuta alla trasformazione della santonina in altri composti, dei quali già ne abbiamo separato uno ben cristallizzato, che sarà oggetto di ulteriori ricerche. L'acido solforico modifica la santonina prima di discioglierla, il che fa ritenere non difficile la separazione del prodotto di addizione.
Idem dopo 40 ore . . .	3.0014	27	220	— 15. 00	— 227	
Acido solforico, dens. 1.82	3.000	27	220	— 27. 0	— 409	
Acido solforico, dens. 1,68	2.994	27	220	— 23. 8	— 361	
Acido nitrico, dens. 1,33 .	0,960	30	220	— 5. 2	— 246	

Le nostre successive ricerche, che ora verremo esponendo, ci hanno condotto alla scoperta di *due nuove desmotroposantonine* $C^{15}H^{18}O^{3}$: una *levogira*, fusibile a 194°, corrispondente all' acido destrosantonoso; l' altra *inattiva*, fusibile a 198°, corrispondente all' acido racemosantonoso.

Abbiamo appunto ottenuto le due desmotroposantonine già prevedute (2).

Levodesmotroposantonina, $C^{15}H^{18}O^{3}$, *e sua trasformazione nell'acido destrosantonoso* $C^{15}H^{20}O^{3}$.

Abbiamo preparato la levodesmotroposantonina nel modo seguente:

Una parte di santonina, ridotta in finissima polvere, si discioglie, a freddo, in 30 parti di acido solforico puro (3) e diluito (per un volume di $H^{2}SO^{4}$, d. 1,82, un volume di acqua). Alla soluzione solforica si aggiungono poco a poco altre 5 parti di acqua raffreddando ed agitando; quindi il liquido si riscalda fra 50° e 60° per circa 24 ore, agitandolo spesso. Dopo

(1) Abbiamo impiegato un polarimetro di Wild, sensibile al decimo di grado, gentilmente messo a nostra disposizione dal prof. G. Grassi-Cristaldi, al quale esprimiamo i nostri sinceri ringraziamenti.

(2) Andreocci, Gazz. vol. XXIII, parte 2ª, pag. 492. Andreocci pubblicherà una Nota relativa alle stereoisomerie delle desmotroposantonine, degli acidi santonosi e dei loro derivati.

(3) Tracce di ferro producono la nota colorazione violetta della santonina, per cui il prodotto della reazione viene anche colorato.

una mezz' ora incomincia a separarsi il prodotto della reazione bianco, cristallino e leggero. Questa è completa, quando un saggio sul liquido filtrato non precipita più con acqua la santonina inalterata. Allora tutto il liquido si filtra alla pompa sopra amianto. La sostanza solida raccolta si lava con acido solforico diluito e poi con acqua, si asciuga fra carta bibula e si cristallizza un paio di volte dall' alcool.

In queste precise condizioni il rendimento è quasi teoretico; invece impiegando l' acido solforico meno diluito, od aumentando la temperatura, si formano altri composti che studieremo in seguito. Se poi si riscalda, o si lascia a sè la santonina sciolta nell' acido solforico concentrato, come è noto, essa annerisce e si altera profondamente ([1]).

La levodesmotroposantonina cristallizza in prismetti duri, disposti a raggio, fonde a 194°, quasi inalterata, quando non si è prolungato molto il riscaldamento. È poco solubile nell' acqua bollente e nell' etere, invece è facilmente solubile, specialmente a caldo, nell' alcool, nell' acido acetico e nel cloroformio.

È levogira con un potere rotatorio specifico di 139°.4, che risulta dalla media delle seguenti due osservazioni fatte in alcool assoluto, col solito tubo di 220 mm.

I. Concentrazione per °/₀ in vol. 1.905, deviazione osservata per $(\alpha)_D^{28°}$ — 5°.8
II. id. 1.603, id. — 4.95.

L' analisi eseguita sulla sostanza, seccata a 100°, fornisce valori corrispondenti ad un isomero della santonina:

I. Sostanza, gr. 0.2225, CO^2 gr. 0,5926, H^2O gr. 0,1508.
II. id. » 0,3200, id. » 0,8558, id. » 0,2155.

	calcolato per $C^{15}H^{18}O^3$	trovato I.	trovato II.
C	73.17	72.64	72.95
H	7.32	7.53	7.48.

La levodesmotroposantonina invece dell' ossigeno cetonico, contiene, come le altre desmotroposantonine, un ossidrile taziario e fenico, poichè non reagisce nè colla fenilidrazina, nè coll' idrosilammina, e dà facilmente un etil ed un acetil derivato, che hanno il comportamento di eteri fenolici.

([1]) Nel « Jahresbericht über die Fortscritte der Chemie », anno 1880, p. 894 e nell' « Handbuch der organischen Chemie di Beilstein », viene riportato che l' isosantonina, fus. a 137-38°, di L. Valente, fu ottenuta per azione dell' acido solforico concentrato sulla santonina; mentre dalla Memoria originale (Trans. Acc. Lincei 1878-79 vol. III, p. 242-243), risulta che essa fu preparata invece coll' acido santonico.

Rispetto ai carbonati solubili ed agli idrati alcalini ed alcalino terrosi, ha anch' essa la doppia funzione fenica e lattonica, essendo a freddo quasi insolubile nei carbonati, mentre si discioglie facilmente negli idrati. L'anidride carbonica la riprecipita parzialmente dalla sua soluzione fatta con un leggero eccesso di acqua di barite; però quella parte che vi resta disciolta si trova allo stato di sale baritico dell' ossiacido, $C^{15}H^{20}O^4$, di cui essa ne è il lattone.

Il detto sale di bario, separato per evaporazione in croste cristalline, lavato con alcool (per eliminare le piccole quantità di levodesmotroposantonina che lo accompagnano) e seccato a 120°, ha dato i seguenti risultati analitici:

Sostanza gr. 0.1758, SO^4Ba gr. 0,0600

	calcolato per $(C^{15}H^{19}O^4)^2$ Ba	trovato
Ba	20.6	20.1

L' ossiacido che genera questo sale è poco stabile; si trasforma facilmente, come gli acidi desmotroposantoninici, suoi isomeri, nel rispettivo lattone per un leggero riscaldamento, o per azione degli acidi.

La levodesmotroposantonina riscaldata con idrato potassico a 210° dà una sostanza fus. a 174°, pure levogira, ma con potere rotatorio minore, sulla quale intendiamo rivolgere le nostre future ricerche.

Per ridurre in acido destrosantonoso la levodesmotroposantonina, ci siamo valsi del metodo già usato per la riduzione dei suoi isomeri (1); cioè abbiamo scaldato, a b. m., per 6 ore, una parte della nostra santonina con 40 p. di acido acetico al 72 °/₀ ed un eccesso di polvere di zinco e poi precipitato l'acido santonoso per aggiunta di acqua al liquido filtrato. Così l'acido destrosantonoso si genera teoreticamente e puro; tanto che basta una sola cristallizzazione dall' alcool per averlo purissimo. È stato da noi identificato per i seguenti caratteri: 1°. punto di fusione 179-80°, apparenza e solubilità; 2°. potere rotatorio specifico in alcool assoluto che abbiamo trovato $= + 75.1$ (2); 3°. sua trasformazione nell' acido racemo, che è stato riconosciuto per l' inattività ottica e pel punto di fusione 153°; 4°. sua trasformazione nei santoniti etilici destro e racemo, riconosciuti per i rispettivi punti di fusione (116° e 125°), dall' aspetto e dalla solubilità; ed anche coll' averne provocato la cristallizzazione mediante un cristallino delle medesime sostanze ottenute per altra via.

Da tutte le nostre ricerche sulla levodesmotroposantonina risulta la più grande analogia colle altre due desmotroposantonine, specialmente coll' isodes-

(1) A. Andreocci, Rend. serie 5ª, vol. II, 1° sem., pag. 328, 494; 2° sem., pag. 175.

(2) Concentrazione della soluzione per °/₀ in vol. 4.236, tubo 220 mm., deviazione osservata per $(\alpha)_D^{28°}$, e $+ 7°$.

motroposantonina, fus. a 189° e corrispondente all'acido levosantonoso. Non possiamo dire però che la nostra santonina, sia la forma enantiomorfa della isodesmotroposantonina quantunque esse generino i due acidi santonosi enantiomorfi, levo e destro; esistendo piccole differenze nel punto di fusione, nell'intensità del potere rotatorio e nell'apparenza cristallina [1]. Invece abbiamo riscontrato la più perfetta rassomiglianza fra i loro derivati etilici ed anche tra i loro derivati acetilici, tanto che i due etilcomposti, come i due acetilderivati, si direbbero identici, se il senso del potere rotatorio non mostrasse che l'uno è l'immagine speculare dell'altro. Difatti dalla loro unione risultano i racemi corrispondenti, che si differenziano dai rispettivi componenti attivi, per il punto di fusione, per la forma cristallina e per la solubilità.

Appunto dall'idrolisi della racemo acetildesmotroposantonina, come vedremo, abbiamo ottenuto la seconda nuova desmotroposantonina, che è inattiva.

Levo-etildesmotroposantonina $C^{15}H^{17}O^2 — O.C^2H^5$
e sua trasformazione nell'acido destro-etilsantonoso $C^{15}H^{19}O^2 — O.C^2H^5$.

Abbiamo disciolto a freddo 10 gr. di levodesmotroposantonina nella soluzione di alcoolato sodico, fatta con 100 cc. di alcool assoluto e 2 gr. di sodio e poi aggiunto 20 gr. di joduro etilico. Dopo un riposo di 48 ore si è riscaldato il liquido a ricadere per qualche tempo. Allontanato l'alcool e l'eccesso di joduro etilico, il prodotto della reazione è stato precipitato con acqua e qualche goccia di acido solforico e poi estratto dall'etere. La soluzione eterea è stata decolorata con anidride solforosa, lavata con carbonato sodico ed evaporata. Il residuo oleoso rimasto, ripreso con alcool ha dato per lenta evaporazione dei grossi cristalli, che abbiamo purificato ricristallizzandoli dall'etere petrolico bollente.

La levo-etildesmotroposantonina rassomiglia in tutte le proprietà, eccettuato il senso del potere rotatorio e perchè genera l'acido destro-etilsantonoso, all'etil-isodesmotroposantonina [2] corrispondente all'acido levo-etilsantonoso [3].

Infatti entrambi fondono a 82°, cristallizzano in grossi prismi, solubilissimi in tutti i comuni solventi organici, eccettuato l'etere di petrolio, dove sono molto meno solubili; sono insolubili nell'acqua e negli idrati alcalini a freddo. Deviano colla stessa intensità il piano della luce polarizzata, però in senso contrario. Infatti mentre la levo-etildesmotroposantonina in alcool assoluto, secondo le nostre osservazioni [4], devia, per $(\alpha)_D^{27°}$, — 129.3

[1] Andreocci spera di decidere tale questione, anche con ulteriori ricerche sulla isodesmotroposantonina, e valendosi possibilmente della opera gentile di persona competente in cristallografia.

[2] A. Andreocci, Gazz. (1895), vol. XXV, parte 1ª, p. 481.

[3] A. Andreocci, Gazz. vol. XXV, parte 1ª, pag. 517.

[4] Concentrazione %, in vol. 4.3676, tubo mm. 220, deviazione osservata — 12°.42.

la etildesmotroposantonina nello stesso solvente, devia, per $(\alpha)_D^{27^\circ}$, + 129.5. Infine la miscela, a quantità uguali, di questi due derivati etilici genera facilmente il racemo, che più tardi descriveremo.

La levo-etildesmotroposantonina ridotta con acido acetico e polvere di zinco, dà nettamente l'acido destro-etilsantonoso (1) che abbiamo identificato: 1°. per il punto di fusione (120°), per l'apparenza e per la solubilità; 2°. per il potere rotatorio in alcool assoluto (la media di due nostre determinazioni dà infatti per $(\alpha)_D^{27^\circ}$ + 72.8 (2)); 3°. per la sua trasformazione nell'acido racemo-etilsantonoso (3), riconosciuto dal punto di fusione (145°), dall'apparenza, dalla solubilità e dall'inattività ottica; 4°. per la sua trasformazione nel destro-etilsantonito etilico (4) e nel racemo etilsantonito etilico (5) (l'uno fus. a 32° e l'altro a 54°) riconosciuti dal punto di fusione, dall'apparenza, dalla solubilità ed anche per avere provocato la loro cristallizzazione con un cristallino delle medesime sostanze ottenute per altra via. La formazione dell'acido destro-etilsantonoso, dalla levo-etildesmotroposantonina, è assai interessante, perchè riconferma che l'ossidrile fenico degli acidi santonosi è quello stesso che preesiste nelle desmotroposantonine; per conseguenza l'ossidrile secondario, che risulterebbe dall'apertura del legame lattonico, sparisce per idrogenazione (6).

Levo-acetildesmotroposantonina $C^{15}H^{17}O^{2}$-O.CO.CH^{3}.

Abbiamo preparato il derivato acetilico della levo-desmotroposantonina col metodo usato per ottenere i suoi isomeri (7), cioè facendo bollire a riflusso la detta santonina con il decuplo di anidride acetica ed il doppio di acetato sodico fuso. Eliminata l'anidride acetica, il residuo è stato lavato con acqua e cristallizzato un paio di volte dall'alcool.

L'acetil derivato è identico in tutte le proprietà all'acetil-isodesmotroposantonina (8), eccettuato il senso del potere rotatorio. Infatti entrambi fondono a 154°, cristallizzano in piccoli prismi sottili e lucenti, sono solubili

(1) S. Cannizzaro e G. Carnelutti, loc. cit. pag. 398., A. Andreocci, Gazz. vol. XXV, parte 1ª, pag. 499.

(2) I determinaz.: concentraz. % in vol. 3.8052, tubo mm. 220, deviaz. osserv. + 5°.73.
II » : » 2.6292, » 220, » + 4. 42.

(3) S. Cannizzaro e G. Carnelutti, pag. 404; A. Andreocci, Gazz. vol. XXV, parte 1ª, pag. 527.

(4) S. Cannizzaro e G. Carnelutti, pag. 398; A. Andreocci, Gazz. vol. XXV, parte 1ª, pag. 498.

(5) S. Cannizzaro e G. Carnelutti, pag. 404; A. Andreocci, Gazz. vol. XXV, parte 1ª, pag. 526.

(6) A. Andreocci, Gazz. vol. XXV, parte 1ª, pag. 553.

(7) A. Andreocci, Gazz. vol. XXIII, parte 2ª, pag. 475.

(8) A. Andreocci, Gazz. vol. XXIII, parte 2ª, pag. 485.

facilmente nell' alcool e nell' acido acetico, quasi insolubili nell' acqua e nelle soluzioni fredde degli idrati alcalini; uno devia il piano della luce polarizzata, per $(\alpha)_D^{28^\circ}$, di $+ 122^\circ.6$ e l' altro, dal risultato delle nostre determinazioni (1), devia per $(\alpha)_D^{27^\circ}$, di $- 122^\circ.9$. La loro miscela è inattiva e genera il racemo che poi descriveremo.

La composizione centesimale della levo-acetildesmotroposantonina, determinata con un campione seccato a 100°, risulta dai seguenti dati:

Sostanza gr. 0.2311; CO^2 gr. 0.6017; H^2O gr. 0,1427.

	calcolato per $C^{17}H^{20}O^4$	trovato
C	70.83	71.01
H	6.94	6.86 .

Questo composto acetilico bollito con una soluzione acquosa, diluita di idrato potassico si discioglie, perde il suo acetile e rigenera la levodesmotroposantonina, che abbiamo identificata dal punto di fusione 194° e dal potere rotatorio trovato per $(\alpha)_D^{27^\circ} = - 142^\circ.7$ (2).

Desmotroposantonina inattiva $C^{15}H^{18}O^3$ *e sua trasformazione nell' acido racemo santonoso* $C^{15}H^{20}O^3$

Col seguente metodo abbiamo preparato la desmotroposantonina inattiva: La racemo-acetildesmotroposantonina in polvere finissima si fa bollire in una soluzione acquosa diluita d' idrato potassico sinchè vi si è tutta disciolta; poi con acido solforico dil. si precipita a freddo la desmotroposantonina corrispondente, che, purificata con una cristallizzazione dell' alcool, fonde a 198°, cristallizza in piccoli prismi aciculari ed è presso a poco solubile nei solventi come il suo isomero levogiro.

Ridotta, con acido acetico e polvere di zinco, dà teoreticamente l'acido racemosantonoso puro; che abbiamo identificato dal punto di fusione 153° e col suo etere etilico, fus. a 125°.

La *racemo-etildesmotroposantonina* ci risulta dalla fusione, ed anche dalla cristallizzazione in alcool del miscuglio, a parti uguali, dell' etilisodesmotroposantonina colla nostra levo-etildesmotroposantonina (che ambedue fondono a 82°). La racemo-etildesmotroposantonina cristallizza in piccoli prismi aciculari, fonde a 106° ed è meno solubile nei solventi organici dei suoi componenti attivi.

La *racemo-acetildesmotroposantonina* è stata da noi ottenuta tanto per fusione, quanto per cristallizzazione del miscuglio dei due acetil derivati cor-

(1) Concentrazione per °/₀ in vol. 1.8374, tubo mm. 220, deviazione osservata $- 4^\circ.97$.

(2) Concentrazione per °/₀ in vol. 1.9104, tubo mm. 220, deviazione osservata $- 6^\circ.00$.

rispondenti fusibili a 154°. Essa fonde a 145° in prismetti meno sottili e meno solubili di quelli dei due suoi componenti attivi.

Le due nuove desmotroposantonine da noi ottenute hanno importanza per la stereoisomeria delle possibili forme fenoliche della santonina e per quella degli acidi santonosi che ad esse corrispondono. Oggi infatti, per ognuno dei quattro acidi santonosi conosciuti, è nota la corrispondente desmotroposantonina.

Geologia. — *I grandi laghi pleistocenici delle falde del Vulture.* Nota preliminare di G. De Lorenzo [1], presentata dal Corrispondente Fr. Bassani.

Esortato dall' onorevole Giustino Fortunato a intraprendere lo studio del suo Vulture nativo, e da lui con affettuosa, mecenatica generosità fornito di tutti i mezzi a tal uopo necessarî, ho potuto in questo autunno raccogliere su quel monte ampia messe di osservazioni, di rocce e di fossili, che formeranno materia d' un mio prossimo lavoro sull' estinto vulcano. Intanto, avendo io già, negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Napoli di quest' anno, descritto delle *Reliquie di grandi laghi pleistocenici nell' Italia meridionale*, ho premura di far nota per ora l' esistenza di due altri di questi grandi laghi, che vengono a completare la serie dei bacini lacustri quaternari della Basilicata, e che sono di tutti gli altri tanto più importanti, in quanto la genesi loro e la natura dei loro sedimenti è intimamente connessa con la formazione e la storia del singolare vulcano, alle cui falde essi un giorno si stendevano.

Il primo di questi laghi, di cui l' esistenza fu già sospettata dallo Scacchi, occupava l' attuale valle della morta, medievale Vitalba, che Fortunato ha storicamente illustrata; ossia la valle che dalle falde meridionali del Vulture si stende fin sotto il castello svevo di Lagopesole. I sedimenti, depositatisi in tale lago, formano ora una distesa pianeggiante, lunga un po' più di 10 e larga in media 4 chilometri, che si stende dalla Ufita, sotto il Vulture, fino a Iscalonga, sotto Lagopesole, ed è secata longitudinalmente dalla fiumara dello Stroppito e di Atella e trasversalmente da molti brevi canali, in modo che risulta divisa in tanti piani quadrangolari, di cui quelli di Noi, di Cardo e della Impesa sono i maggiori. Tali piani oscillano tra i 450 e i 500 metri d' altezza sul mare, in modo che la quota massima di 500 o poco più, cui i sedimenti lacustri arrivano, rappresenta appunto il perimetro dello scomparso lago quaternario. I sedimenti sono di natura complessa,

[1] Scritta nel Museo geologico dell' Università di Napoli.

perchè ai conglomerati più profondi, costituiti di elementi d'origine sedimentaria, succede verso l'alto una complicata alternanza di tufi fonolitici e tefritici, di tufi argillosi, argille, marne, calcari lacustri, conglomerati a elementi sedimentari e vulcanici etc., il tutto essendo coronato dai grossi banchi di travertino, che formano il piano di Atella e della limitrofa Serra e la sommità della penisoletta conica, su cui sorgeva l'antica Vitalba. Naturalmente all'estremità nord-ovest, sotto le falde del Vulture, predominano i depositi di natura vulcanica, mentre a quella sud-est, sotto Lagopesole, abbondano quelli di origine sedimentaria. Lo spessore massimo di tali sedimenti, sotto Atella, può calcolarsi di circa un centinaio di metri. I travertini di Atella e Vitalba, che rappresentano la fase ultima del lago e forse anche furono subaerei, contengono numerosi avanzi di gastropodi terrestri e qualche osso lungo di ruminante. I sottostanti tufi, i calcari e le marne, oltre che avanzi indeterminabili di grossi vertebrati, sono ricchi in conchiglie di *Dreissensia*, *Planorbis*, *Limnaeus*, etc. Un giacimento a *Dreissensiae* molto abbondante si trova nella ripa tagliata a picco sulla sponda sinistra della fiumara di Atella, lungo il sentiero che va dal ponte della carrozzabile alla Masseria Marotta, a circa 500 metri di distanza dal ponte. Il materiale sedimentario era trascinato nel lago, mediante le acque correnti, in parte dal semicerchio appenninico, che dal gruppo di Santa Croce e Pierno girando pel Caruso e Lagopesole va fino a Rionero, e in parte dalle pendici del Vulture rivolte a scirocco; con l'aggiunta delle ceneri, che, eruttate dal vulcano, cadevano direttamente nelle acque del lago.

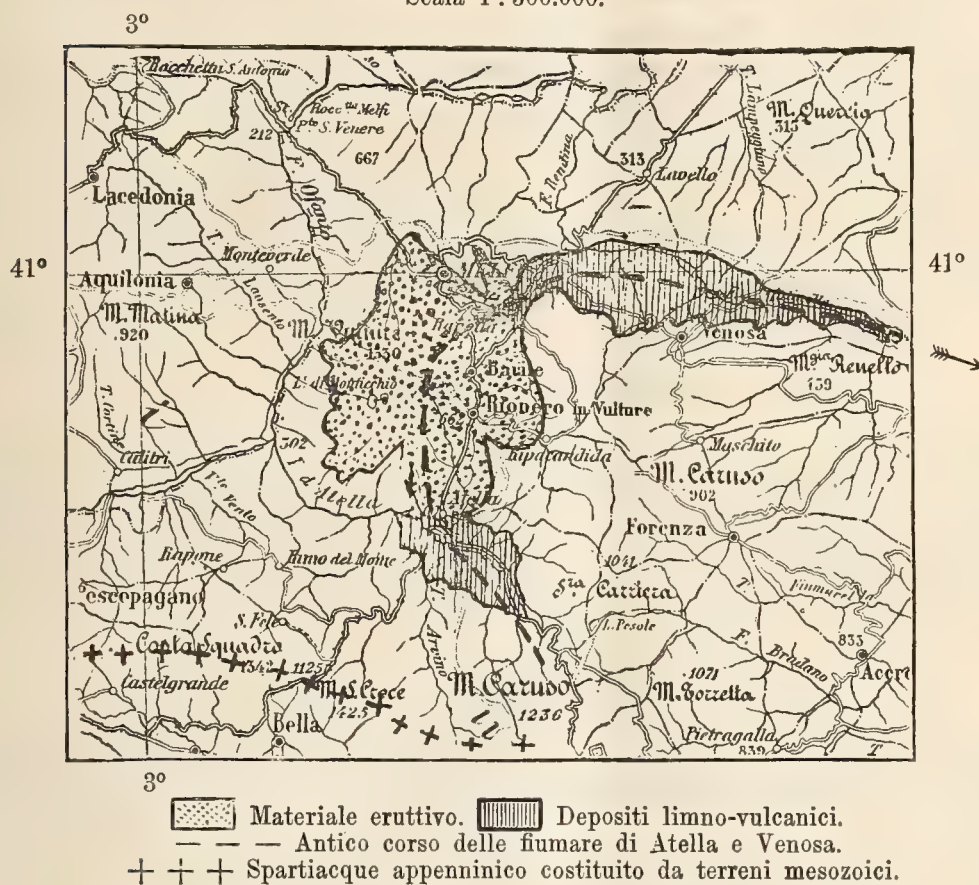
L'altro lago, finora d'ignorata esistenza, lungo più di 20 chilometri e largo fin circa 6, occupava la depressione compresa tra il Vulture, l'altipiano di Venosa e l'altipiano di Lavello-Monte la Quercia. I sedimenti di questo lago cominciano a trovarsi sotto Rapolla, scendono poi lungo l'Arcidiaconata, formando i Piani della Chiesa sulla sponda destra e l'Albero in piano sulla sinistra di essa, e risalgono poi lungo la fiumara di Venosa fino alla Matinella, costituendo la toppa della Vazza, i Piani di Mezzana, quelli di Zanzanello, i Piani del Forno, il Piano Regio, i Piani della Maddalena, Tufarello, Terranera, I Scaffoni, etc. etc. Tutti questi piani sono percorsi longitudinalmente dalla fiumara di Venosa e sono secati mediante *cañons* transversali, dalle pareti ripide e profonde, che vanno tutti a scaricarsi nella fiumara suddetta. Essi piani sono compresi tra 300 e 350 metri d'altezza sul mare, in modo che non si distinguono se non per un basso, ma marcato gradino, di 25-50 metri d'altezza dagli altipiani di Venosa e di Lavello, che si stendono in media tra 370 e 400 metri sul mare e che sono costituiti da argille sabbiose, sabbie gialle e conglomerati del Pliocene superiore e Pleistocene marino. Invece i sedimenti del lago, che formano la piana più bassa traversata dalla fiumara di Venosa, hanno una costituzione del tutto diversa. In basso si trovano dei conglomerati a elementi di rocce

sedimentarie, a cui succedono dei conglomerati misti di rocce sedimentarie e vulcaniche, con prevalenza di queste ultime, essendo in essi specialmente notabili due banchi, formati da grossi blocchi di tefriti augitiche e hauyniche e di fonoliti trachitoidi a grossi cristalli di sanidino, che giungono fino al di là del Tufarello, a oriente di Venosa, dove si trovano ancora dei massi lavici di circa due metri cubici di volume. A questi conglomerati succedono superiormente dei tufi fonolitici e tefritici, tufi argillosi, argille tufacee, marne, calcari lacustri, travertini, etc.: tutta un' alternanza complessa di sedimenti lacustri, in cui i calcari e le marne predominano sui tufi vulcanici, a misura che ci si allontana dal Vulture verso oriente. Sottili plaghe di tufi continuano però ancora a trovarsi più in là, nella valle del Basentiello, sotto Palazzo San Gervasio e a est di Genzano. Lo spessore massimo visibile di tali sedimenti limnovulcanici è compreso tra 120 e 140 metri. Molto interessanti sono tali sedimenti per i fossili in essi contenuti, citati già fugacemente da Francesco Lenormant e da Guiscardi, cui furono mostrati dall' avv. Gerardo Pinto di Venosa, che ne ha fatto e ne fa solertemente raccolta. Agli Scaffoni, a Tufarello, a Terranera, alla Cupa, a Belveduta, etc. i tufi e le marne sono ricchi di conchiglie di *Unio*, *Anodonta*, *Dreissensia*, *Limnaeus*, *Planorbis*, etc. e contengono frequentemente ossa, denti e mandibole di *Cervus elaphus*, *Ursus spelaeus*, *Felis spelaea*, *Hippopotamus maior* e *Elephas antiquus*. A Terranera, nella parte più alta dei sedimenti, insieme a tali avanzi si trovano anche delle asce e delle punte di lancia e di freccia di pietra scheggiata, che però, come già fece osservare il Guiscardi, quantunque del tipo di St. Acheul, sono da ritenersi come appartenenti forse a un' epoca più recente. C' è da notare, che in questo lago di Venosa, come in quello di Vitalba, i conglomerati alluvionali più profondi non contengono elementi vulcanici. In questo però esistono i conglomerati a grandissimi blocchi di lave, di cui nell' altro lago non si trova traccia alcuna: ciò stabilisce tra i due bacini una profonda differenza, dovuta alla diversità della genesi e della storia di essi e alle loro diverse relazioni col vulcano.

Prima che questo si formasse, si era già da gran tempo ritirato verso oriente il mare pliocenico superiore e pleistocenico, in cui s' erano depositate le argille sabbiose e le sabbie gialle a *Cyprina islandica*, che ora scendono uniformemente dai contrafforti dell' Appennino verso le pianure appulolucane. Col progredire del sollevamento postpliocenico avanzavano di pari passo da monte a valle la denudazione e l' erosione fluviale, particolarmente favorite dal clima dell' epoca glaciale e postglaciale. E infatti, già prima che il Vulture sorgesse, esisteva non solo la vallata di Vitalba, dalla quale erano in gran parte scomparsi i sedimenti marini, pliocenici superiori e pleistocenici, che facevano continuazione a quelli di San Fele e di Ruvo del Monte, ma esisteva puranco la vallata di Venosa, intagliata direttamente negli stessi sedimenti. E di tale preesistenza delle vallate al vulcano fa non

dubbia fede il conglomerato alluvionale a elementi sedimentari, che sta sotto i depositi limno-vulcanici, tanto nel bacino di Vitalba che in quello di Venosa. Oltre a ciò, dalla tettonica dei terreni sottostanti al Vulture bisogna anche dedurre, come dimostrerò nel mio prossimo lavoro, che la vallata di Venosa non rappresentava che la parte bassa di quella di Vitalba, e che le acque diluviali accoltesi nel bacino imbrifero di Pierno, passando sotto Atella, il Gaudo, e sopra il posteriore asse eruttivo del Vulture, scendevano per la vallata di Venosa verso oriente al mare, che sempre più si allontanava.

Scala 1 : 500.000.

Materiale eruttivo. Depositi limno-vulcanici.
— — — Antico corso delle fiumare di Atella e Venosa.
+ + + Spartiacque appenninico costituito da terreni mesozoici.

Quando nella valle scoppiarono le prime conflagrazioni vulcaniche, le abbondanti alluvioni postglaciali continuarono ancora a fluire per lo stesso cammino e trascinarono nella vallata di Venosa gli enormi blocchi di tufi e di lave, di cui la superiore vallata di Vitalba rimase del tutto immune. Ma quando il magma eruttivo, ingentemente accumulandosi, cominciò a far innalzare il novello monte, questo sbarrò il cammino alle acque della vallata di Vitalba, che si gonfiarono in lago e furono costrette così a cercarsi più in alto, tra il Vulture e l' Appennino, una novella via, per la quale scorrendo ed erodendo produssero infine lo svuotamento del lago e degenerarono poi nell' attuale fiumara di Atella. Nello stesso tempo, per un solle-

vamento a oriente verso le Murge pugliesi o per un abbassamento nella regione del Vulture, anche la vallata di Venosa si trasformò in lago, nel quale però, per la mancanza delle alluvioni appenniniche, non più giunsero i grossi blocchi di lava, ma solo dei fini tufi vulcanici, che si associarono alle marne e ai calcari lacustri. E più tardi ancora, per un ulteriore accentuarsi di tale sollevamento o abbassamento, le acque, scorrenti dal lago al mare, non poterono più defluire verso oriente, ma dovettero pigliare il cammino inverso e si aprirono tra l' altipiano di Lavello e le colline eoceniche di Melfi, sull' attuale Réndina, un ampio varco, attraverso cui esse scolarono, riducendosi all' attuale fiumara di Venosa con i suoi affluenti.

Ciò va pienamente d' accordo con l' ipotesi filologica, indipendentemente pensata dal mio amico, dott. K. E. Neumann in Vienna, che cioè il nome Vulture o Volture, il quale, così come Volturnus, include in sè l' idea del volvere, sia salito dalla valle al monte, dal fiume al vulcano: analogamente a quanto lo stesso Neumann ha visto molte volte verificarsi nell' India.

Ma di tutto ciò, e dei laghi e del vulcano, parlerò più ampiamente e dimostrativamente nel mio prossimo lavoro sul monte Vulture.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Capellini dà annunzio della perdita fatta dalla Classe nella persona del Socio straniero Giacomo Hall, morto il 7 agosto 1898, e commemora brevemente l'estinto; il defunto Socio faceva parte dell' Accademia sino dal 6 agosto 1894.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci stranieri Greenhill, Hall, Reye, e dai signori Janet e van der Mensbrugghe. Richiama poi l'attenzione della Classe sui volumi 11° e 12° delle *Oeuvres de Laplace*, dono dell'Accademia delle Scienze di Parigi, e su di una nuova serie di tavole fotografiche della Luna, inviate dall' Osservatorio di Parigi.

Il Corrispondente Pirotta fa omaggio di un volume pubblicato dal R. Istituto Botanico di Roma, e ne parla.

CORRISPONDENZA

Il Socio Capellini comunica all'Accademia che nel Congresso geologico internazionale tenutosi a Pietroburgo nell' agosto del 1897, veniva proposta ed approvata la creazione di un Istituto galleggiante internazionale, per lo

studio della biologia e della fisica del mare; questa proposta fu motivata dagli splendidi risultati ottenuti dalle diverse crociere scientifiche fatte per cura di varie nazioni, specialmente dall' Inghilterra, e sopratutto da quella compiuta dal « Challenger ». Alla effettuazione di questo grande progetto, di cui dovrebbero approfittare tutti gli scenziati del mondo che si dedicano allo studio della geologia, è necessario che le più autorevoli istituzioni scientifiche diano il loro appoggio marale. Ad ottenere tale appoggio s' interessa il Comitato istituitosi a Pietroburgo, e che per l' Italia ha incaricato il sen. CAPELLINI di ottenere l' adesione dell' Accademia dei Lincei e dell' Istituto di Bologna.

Vari Socî parlano con elevate parole in favore di tale proposta; dopo di che l'Accademia, facendo plauso alla proposta presentata del Socio Capellini, delibera all'unanimità, di dare ad essa il proprio appoggio morale, e di adoperarsi al momento opportuno affinchè l'Italia cooperi cogli altri Stati all' effettuazione del grandioso progetto.

Il Segretario BLASERNA dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Amsterdam; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Manchester; la Società geologica di Sydney; il Museo di zoologia comparata di Cambridge Mass.; l' Istituto meteorologico di Bucarest; l' Università di Tokyo.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

La R. Accademia delle scienze di Stockolm; il R. Corpo delle Miniere di Roma; l'Osservatorio di Parigi; la R. Scuola degl' ingegneri di Roma; l' Università di Heidelberg.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 4 dicembre 1898.

Bashforth F. — Replica di Krupp alla protesta del sig. Bashforth. Transtated with notes Cambridge, 1898. 8°.

D'Achiardi G. — I Quarzi delle Gessaje Toscane. Pisa, 1898. 4°.

Id. — Note di mineralogia italiana. Pisa, 1898. 8°.

De Angelis d' Ossat G. — L'Analogia nelle scienze naturali. Siena, 1898. 8°.

Id. — La Scienza. Siena, 1898. 4°.

Id. — L' origine delle montagne. Siena, 1898. 4°.

Gandry A. — Notice sur les travaux scientifiques de Victor Lemoine. Paris, 1898. 8°.

Greenill A. G. — The Motion of a Solid in infinite Liquid nnder no Forces. Baltimore, 1898. 4°.

Hall J. — Natural history of New York. Palaeontology. Vol. I-III. Albany 1847-1861. 4°.

Janet Ch. — Études sur les fourmis, les guêpes et les abeilles. Notes 14-16 Lille, 1897.

Id. — Les habitations à bon marché dans les villes de moyenne importance. Bruxelles, 1897. 8°.

Id. — Sur l'emploi de Désinences caractéristiques dans les dénominations des groupes établis pour les classsifications zoologiques. Beauvais, 1898. 8°.

Id. — Sur les limites morphologiques des anneaux du tégument et sur la situation des membranes articulaires chez les Hymenoptères arrivés a l'état d'imago. Paris, 1898. 4°.

Id. — Sur une cavité du tégument servant, chez les Myrmicinae, à étaler, au contact de l'air, un produit de secretion. Paris, 1898. 4°.

Langley S. P. — The Astrophysical Observatory. Washington, 1897. 8°.

Laplace. — Oeuvres complètes. T. XI. XII. Paris, 1895-98. 4°.

Loewy M. & *Puiseux P.* — Atlas photographique de la Lune. 3e fasc. Paris, 1898. 4°.

Mensbrugghe G van der. — Sur la théorie de l'explosion d'une bulle de savon très mince. Bruxelles, 1897. 8°.

Id. — Sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides. I. II. Bruxelles, 1896. 8°.

Id. — Sur les propriétés fondamentales des liquides. Bruxelles, 1898. 8°.

Id. — Sur l'interprétation du principe d'Archimède fondée sur la parfaite élasticité des liquides. Bruxelles, 1898. 8°.

Id. — Sur une résistance spéciale constatée à la surface des grands cours d'eau. Fribourg, 1898. 8°.

Reye Th. — Die Geometrie der Lage. 1e Abth. 4e Awfl. Leipsig, 1897. 8°.

Savastano L. — L'arboricoltura negli Stati Uniti. Roma, 1898. 8°.

Id. — Le condizioni agrumarie italiane ed estere. Napoli, 1898. 4°.

Tikhomandritzky M. — Cours de la thèorie des probabilités. Karkow, 1898. 8°.

P. B.

// RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 dicembre 1898.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Di un nuovo metodo sperimentale per lo studio dell'assorbimento della luce nel campo magnetico.* II. Nota del Socio Augusto Righi.

Nella produzione del fenomeno scoperto dal sig. Zeeman la luce adoperata è quella emessa dal corpo, per esempio vapore di sodio, collocato nel campo magnetico, luce che non è sensibilmente polarizzata. Avendo avuto l'idea di studiare quali fenomeni si sarebbero ottenuti mediante la luce polarizzata, con che mi sembrava d'entrare in un nuovo campo di ricerche assai promettente, dovetti naturalmente prendere in esame, non già l'ordinario fenomeno Zeeman, che chiamerò fenomeno *diretto*, ma il fenomeno *inverso*, quello cioè che si produce quando un raggio di luce proveniente da una sorgente qualunque attraversa il corpo, per esempio vapore di sodio, posto nel campo magnetico. In questo caso, infatti, era facile polarizzare con un nicol la luce adoperata.

Riflettendo sui fenomeni che si sarebbero prodotti, e tenuto conto della legge di Kirchhoff estesa anche alla forma della vibrazione (estensione che risultava dall'osservazione già fatta dallo stesso Zeeman del fenomeno inverso), trovai, che, estinta con un secondo nicol la luce che ha attraversato il sodio, mentre non esiste campo magnetico, doveva apparire, al crearsi di questo, una luce gialla di lunghezze d'onda pochissimo differenti da quelle assorbite dal sodio. In una precedente Nota (1) ho esposti quei miei ragionamenti,

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5a, v. VII, pag. 41.

come pure le esperienze le quali, nei limiti da esse consentiti, confermavano pienamente le mie previsioni.

Quelle esperienze sono state di poi ripetute e confermate da molti fisici. Di più, alcuni di essi, adoperando mezzi più adeguati, hanno anche potuto osservare certi fatti assai interessanti, dei quali naturalmente non avevo potuto dapprima tener conto. Così, avendo i sigg. Macaluso e Corbino (1) sostituito il reticolo di Rowland allo spettroscopio a visione diretta, solo apparecchio spettrale che io avessi a mia disposizione, questi fisici hanno trovato, che al fenomeno Zeeman si sovrappone una rotazione delle vibrazioni, quale secondo H. Becquerel (2) e Voigt (3) era da aspettarsi, per le lunghezze d'onda assai vicine a quelle assorbite, rotazione che è intimamente legata alla dispersione anomala, che pure esiste per quelle speciali lunghezze d' onda, messa recentemente in evidenza con ingegnosissime esperienze dal sig. Becquerel (4).

In causa dell'esistenza del fenomeno rotatorio non si può più dire, che le esperienze descritte nella citata Nota mettono in evidenza l' esistenza del fenomeno Zeeman, quando lo si consideri a sè, indipendentemente dalla rotazione delle vibrazioni, che ora sappiamo lo accompagna. Si può dire invece, che quelle mie esperienze offrono un mezzo semplice di dimostrare l'esistenza del fenomeno complesso Zeeman-Faraday, senza che si possa assegnare in modo generale qual parte della luce, che appare creando il campo magnetico, spetti al cambiamento di lunghezze d'onda, e quale alla rotazione delle vibrazioni.

I sigg. Corbino e Macaluso pensano che quest'ultima parte sia la maggiore, mentre io inclino per l' opposto parere, basandomi sulla circostanza, che per osservare distintamente il fenomeno di rotazione delle vibrazioni occorre una fiamma, la quale, per essere molto ricca in vapore metallico, dia larghe righe d' assorbimento, mentre questa condizione non è necessaria affinchè l'apparizione di luce indicatrice del fenomeno Zeeman abbia luogo (5). Oltre a ciò si vedrà più oltre, che aumentando lo spessore del corpo assorbente, la luce che appare creando il campo magnetico si affievolisce sino anche a sparire affatto.

In questa seconda Nota riferisco alcune nuove considerazioni generali sul fenomeno in questione, ed alcune osservazioni, fatte colle stesse disposizioni sperimentali descritte nella Nota precedente, non solo sopra l' ipoazotide, che già studiai allora, ma anche su altri aeriformi.

Influenza della larghezza delle righe di assorbimento. — Nel ragionamento esposto nella mia prima Nota ho considerato un corpo, che produca una o più righe di assorbimento senza larghezza sensibile, ed ho tacitamente supposto che per tutte si verifichi lo sdoppiamento dovuto al campo magne-

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, v. VII, pag. 293.

(2) Comp. rend., 31 octobre 1898.

(3) Gott. Nachr. 1898, Heft 4.

(4) Comp. rend. 5 décembre 1898.

(5) L'esperienza riesce anche con una fiamma poverissima in sodio, prodotta nella maniera insegnata dal sig. Koenig.

tico. Sotto queste condizioni la luce che appare al chiudersi del circuito deve essere di colore sensibilmente complementare di quella trasmessa, e perciò sensibilmente eguale a quella emessa: gialla, dunque, col sodio, rossa col litio, verde-azzurra coll' ipoazotide ecc.

Ma se si tien conto della larghezza finita delle righe di assorbimento, si riconosce facilmente che la detta luce può assumere colorazioni assai differenti.

Infatti, per ogni data lunghezza d'onda, considerata in una larga riga di assorbimento, giungono all'analizzatore, quando il campo magnetico è eccitato, due raggi circolari inversi, le cui lunghezze d'onda sono per l'uno un po' minore e per l'altro un po' maggiore della lunghezza d'onda primitiva. Perciò, in posto della primitiva riga di assorbimento se ne hanno, nella luce che arriva all'analizzatore, due a vibrazioni circolari inverse, le quali, stante la larghezza della riga di assorbimento da cui provengono, possono essere in gran parte sovrapposte. Nella regione comune resta dunque, all'uscita dall'analizzatore, l'oscurità, cosicchè la luce che appare corrisponde solo alle porzioni esterne delle due righe, ove non si ha reciproca sovrapposizione.

Questa considerazione intanto rende conto di un fatto constatato, e cioè che l' intensità della luce, che appare eccitando il campo magnetico, cresce sino ad un certo limite al crescere dell' intensità di questo. Ma inoltre fa vedere che, quando le righe di assorbimento siano assai larghe, la detta luce potrà assumere nel suo complesso una colorazione diversa da quella complementare della luce trasmessa.

A questa diversità potrà anche contribuire l'essere eventualmente di differenti grandezze per le varie righe di un medesimo corpo lo sdoppiamento prodotto dal campo magnetico.

Le esperienze seguenti, fatte sull' ipoazotide, mi sembrano d'accordo con questa conclusione.

Esperienze coll' ipoazotide. — Nell' esperienza con questo gas descritta nella prima Nota si produsse, eccitando il campo magnetico, una luce verde-azzurra. Ho di poi riconosciuto, che luce di tal colore si produce soltanto quando lo spessore dello strato di gas sia abbastanza piccolo, o il gas abbia piccola densità, mentre si ha luce di altro colore se lo strato è assai grosso, ed il gas è puro e non diluito con aria.

Ciò risulta da esperienze fatte con tubi più o meno lunghi contenenti ipoazotide, e posti nell'asse di rocchetti percorsi da una corrente e la cui lunghezza variò da pochi centimetri sino a più di due metri. Ecco, per esempio, quanto ho osservato con un tubo lungo 40 c., mentre il campo magnetico nell'asse del rocchetto era di circa 600 unità.

Quando il tubo è completamente pieno di gas, non si osserva nessun fenomeno al chiudersi del circuito. Scacciando con aria secca parte del gas, il fenomeno si produce; ma la luce che appare eccitando il rocchetto è giallo-

rossa, simile a quella che il gas trasmette. Diluendo di più in più il gas, la luce diviene biancastra, e poi verde-azzurra. Il sostituire al tubo lungo 40 c. tubi di più in più corti sino ad 1 o 2 centimetri, dà luogo agli stessi successivi cambiamenti.

Esaminando collo spettroscopio a visione diretta quella luce, si riconosce, che mentre quando il gas è assai diluito o in istrati di piccolo spessore, lo spettro è press'a poco complementare di quello dato dalla luce tasmessa (almeno nella parte più luminosa dello spettro), quando invece lo spessore o la densità del gas aumentano, quello spettro risulta visibilmente modificato, e di più in più limitato dalla parte più rifrangibile. Dietro osservazioni fatte in condizioni migliori delle primitive mi è anzi sembrato, che questa resti sempre alquanto oscura, e che perciò se la luce verde-azzurra è fisiologicamente complementare della giallo-rossa trasmessa, essa però non contenga tutte le lunghezze d'onda mancanti in quest'ultima.

Risulta in particolare da queste osservazioni che uno strato troppo grosso o troppo denso di gas, che verosimilmente produce più larghe righe d' assorbimento, è sfavorevole alla riescita dell' esperienza.

Bromo e *iodio*. — Questo risultato avuto coll' ipoazotide mi decise a riprendere in esame i vapori di bromo e di iodio, coi quali anteriormente non avevo osservato nessun effetto. Era probabile infatti che nei primi tentativi fatti con questi vapori lo spessore adoperato fosse troppo grande.

Avendo ripetuto l' esperienza con strati sottili, essa è riescita completamente [1].

Pel bromo occorre uno spessore che non superi molto un centimetro, ma che può essere alquanto minore. Il vapore, quale il bromo lo produce alla temperatura ordinaria, è contenuto in un tubetto chiuso alle basi da vetri piani sottilissimi, che non producano doppia rifrazione accidentale e diano luogo ad una rotazione piccolissima. La luce che apparisce eccitando il campo è verde-azzurra. Esaminata collo spettroscopio essa dà uno spettro che si estende all' incirca dalla regione della riga D sino al di là della *b*. Da questa parte è limitato più bruscamente che dalla parte meno rifrangibile. Come coll' ipoazotide, se si aumenta lo spessore dello strato di vapore, quella luce diviene rossastra e meno intensa, poi finisce col non prodursi più.

Il iodio offre certe difficoltà pratiche. Siccome per svolgere il vapore occorre il riscaldamento, così accade che i vetri che chiudono il tubetto divengono facilmente birefrangenti (per ineguaglianza di riscaldamento, deformazioni etc.), d' onde della difficoltà di avere l' oscurità prima di eccitare il campo. Ho quindi dovuto sopprimerli, ed impedire l' uscita del vapore dal tubo con una lenta e ben regolata aspirazione dall' interno.

[1] Adoperando strati non tanto sottili converrebbe d'altronde allontanare i poli dell'elettrocalamita, ciò che renderebbe meno intenso il campo magnetico.

Quando lo spessore del vapore di iodio attraversato dalla luce è di pochi millimetri, al crearsi del campo magnetico apparisce una bella luce azzurra. Esaminata collo spettroscopio essa dà uno spettro che si estende dalla regione della riga E sino quasi alla F ([1]).

Come si vede anche nel caso dei vapori di bromo e di iodio, l' azione del campo magnetico si manifesta solo in una porzione limitata dello spettro.

Esperienze con altri vapori. — Non ho ottenuto finora nessun effetto col cloruro di nitrosile (NO Cl) e col cloruro di cromile ($Cr\,O_2\,Cl_2$). Invece ho osservato l' apparizione di luce per opera del campo magnetico, ponendo fra i poli i vapori di monobromuro di iodio (JBr), di monocloruro di iodio (JCl), o di tetrabromuro di selenio ($Se\,Br_4$). Col primo di questi corpi la luce prodotta dall' azione magnetica è azzurra, come quella che dà il iodio; col secondo è di un azzurro meno saturo, cioè più biancastro; col terzo infine è verde-azzurra, un pò meno verde però di quella che dànno il bromo e l' ipoazotide ([2]).

S' intende che con ognuno di questi corpi, come pure col bromo, col iodio, la luce apparsa non si estingue girando l' analizzatore in un senso qualunque, ma è invece sostituita dalla luce trasmessa, ciò che permette di non confondere il nuovo fenomeno con quello di Faraday. È dunque lecito il supporre che con tutti questi corpi si potrà osservare lo sdoppiamento delle righe d' assorbimento, al che si richiederà però probabilmente un campo magnetico intensissimo.

Luce diretta trasversalmente alle linee di forza. — Nella prima Nota dimostrai che fenomeni simili a quelli, che si producono colla luce propagantesi parallelamente alle linee di forza, dovevano prodursi con luce trasversale, purchè questa venisse polarizzata ed analizzata circolarmente; ma la difficoltà di realizzare una estinzione abbastanza perfetta m' impedì ogni verifica sperimentale.

Recentemente il signor Cotton ([3]) ha fatto una simile esperienza con luce trasversale polarizzata a 45° dalle linee di forza ([4]). È evidente, in

([1]) Una esperienza di breve durata può farsi nello stesso modo che pel bromo o per l'ipoazotide, coll'avvertenza di riscaldare un po' il tubetto, dopo avervi introdotto un cristallo di iodio, tanto da svolgervi una piccola quantità di vapore.

([2]) Potrebbe darsi che l' effetto osservato con questi vapori provenisse in tutto o in parte da una loro parziale dissociazione.

([3]) Comp. rend. 5 décembre 1898.

([4]) È giusto di far rilevare che una simile esperienza era stata già prevista dal signor Corbino sino dallo scorso settembre. Infatti conversando meco delle mie esperienze, e della riproduzione fattane insieme al prof. Macaluso, in seguito alla quale questi due fisici furono condotti ad osservare gl' interessanti fenomeni di cui ho parlato più sopra, ebbe occasione di farmi notare, come appunto con luce trasversale polarizzata a 45° dovessero osservarsi fenomeni simili a quelli da me descritti. Questo caso speciale non era stato da me preso in considerazione.

base ai ragionamenti svolti nella mia prima Nota, che anche in queste condizioni deve osservarsi l' apparizione di luce al crearsi del campo magnetico. Anzi il signor Cotton attribuisce una speciale importanza a questa disposizione, perchè con essa la rotazione delle vibrazioni non interviene a complicare il puro fenomeno Zeeman.

Però anche con questa disposizione al fenomeno Zeeman se ne sovrappone un altro, con esso strettamente connesso, quello cioè di una doppia rifrazione. Infatti il sig. Voigt ([1]) ha dimostrato recentemente, che dalla sua teoria si deduce l' esistenza di questa doppia rifrazione, e l' ha anche constatata, insieme al prof. Wiechert, con apposite esperienze.

I fenomeni che si ottengono colla luce trasversale alle linee di forza non differiscono che per l' intensità, finchè si osservano direttamente coll' occhio o per mezzo d' uno spettroscopio a piccola dispersione, da quelli relativi alla luce propagantesi secondo l' asse dell' elettrocalamita. Il colore della luce, che il campo fa apparire, è lo stesso nei due casi, e lo spessore o la densità del gas esercita nei due casi la stessa influenza.

Aggiunta. — Una esperienza, fatta con due fiamme di sodio e descritta nella prima Nota, servì a dimostrare come l' azione del corpo posto nel campo magnetico, si manifesti veramente su quelle lunghezze d' onda, che sono vicinissime a quelle della luce assorbita nelle condizioni ordinarie. La stessa esperienza si può eseguire più comodamente coll' ipoazotide, operando come segue.

Oltre al tubetto contenente quel gas e posto fra i poli, se ne colloca un altro sul cammino della luce fra la sorgente luminosa e l' elettrocalamita. Se questo secondo tubo è assai più lungo di quello posto fra i poli, il fenomeno più non si produce. Ciò accade se, per esempio, il tubo posto nel campo magnetico è lungo 2,7 c. e l' altro invece 40 c., oppure se il primo è lungo 1,2 c. e l' altro 15,2 c.

Se mentre fra i poli trovasi il tubo di 2,7 c. si mette davanti alla sorgente un tubo di lunghezza assai minore di 40 c., per esempio lungo 15,2 c., si ottiene ancora una traccia del solito fenomeno, e cioè l' apparizione di una debole luce giallo-rossa, allorchè si chiude la corrente magnetizzante.

La spiegazione di questi fenomeni è ovvia.

([1]) L. c.

Fisica terrestre. — *Osservazioni di temperatura e del colore delle acque fatte nell'Adriatico e nel Jonio.* Nota riassuntiva di A. Riccò e G. Saija [1].

Le osservazioni sono state fatte sul piroscafo *Aspromonte* dal Comandante sig. A. Salzone, dallo scrivano sig. G. Milea e dal macchinista F. Saija, fratello di uno di noi due.

Le ore da noi stabilite per le osservazioni erano: le 5, le 7 (dal 1° aprile al 30 settembre, o le 8 dal 1° ottobre al 31 marzo), il mezzodì, le 17; e poi qualunque altra in cui venisse fatto di eseguire le osservazioni, purchè sempre si rilevasse l'ora e la posizione della nave.

Per avere la temperatura dell' aria, il termometro si esponeva all' ombra per 5 minuti sul ponte della nave, a circa 5 metri di altezza sul mare.

Per avere la temperatura superficiale dell' acqua del mare se ne attingeva un secchio, e se ne osservava la temperatura immergendovi il termometro fino all' estremità della colonna di mercurio.

I termometri adoperati sono stati tutti campionati all' Osservatorio di Catania.

Le osservazioni durarono dal 22 agosto 1897 al 10 luglio 1898: il numero totale delle osservazioni è 191 nell' Adriatico, 66 nel Jonio. Non si potè farne di più, perchè il piroscafo ebbe altra destinazione.

Le osservazioni furono aggruppate secondo le stagioni, ed anche secondo l' ora, dividendole in mattutine da 0^h a 8^h, diurne da 8^h a 16^h, serotine da 16^h a 24^h.

Quanto al luogo queste osservazioni, che in generale furono sempre fatte *al largo*, furono aggruppate in jonie ed adriatiche e queste furono divise in tre gruppi, ciascuno dei quali comprende tutte le osservazioni che capitarono entro uno stesso quadrato geografico, avente ciascun lato di 2°; e così abbiamo avute distinte le osservazioni per l'*alto*, *medio* e *basso* Adriatico.

Ecco i risultati che derivano dalle medie per la temperatura dell' aria sovrastante ai due mari:

Aria.

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
Adriatico. . . .	10°.3	15°.0	23°.9	18°.4	16°.9
Jonio.	13.5	15.6	23.9	23.0	19.0
Differenza	— 3.2	— 0.6	— 0.0	— 4.6	— 2.1

[1] Il lavoro sarà stampato per esteso negli *Annali Idrografici italiani*, pubblicati per cura del Direttore del R. Ufficio Idrografico P. L. Cattolica, Capitano di fregata.

dove vedesi che la differenza fra i due mari è nulla nell' estate, massima in autunno, perchè allora il Jonio ha ancora una temperatura media quasi eguale a quella dell' estate, mentre sull'Adriatico l' aria si è sensibilmente raffreddata.

Quanto alla temperatura superficiale dell' acqua del mare abbiamo:

Mare.

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno.
	o	o	o	o	o
Adriatico	12.8	14.5	23.6	19.3	17.6
Jonio	14.9	14.9	22.9	23.5	19.0
Differenza	— 2.1	— 0.4	+ 0.7	— 4.2	— 1.4

dove si vede che la temperatura del Jonio è massima nell'autunno, anzichè nell' estate; e che anche per l'acqua la differenza fra i due mari è massima nell'autunno, minima in primavera ed estate; inoltre la media estiva per l'Adriatico è pressochè eguale alla media autunnale del Jonio.

È notevole il ritardo che in autunno presentano nel raffreddarsi l' aria ed ancora più l' acqua del Jonio.

Confrontando ora la temperatura dell' aria colla superficiale del mare, si ha:

Adriatico.

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno.
	o	o	o	o	o
Aria	10.3	15.0	23.9	18.4	16.9
Mare	12.8	14.5	23.6	19.3	17.6
Differenza. . . .	— 2.5	+ 0.5	+ 0.3	— 0.9	— 0.7

dunque nell' inverno la temperatura dell' aria è notevolmente inferiore a quella del mare, nelle altre stagioni e nella media dell' anno la differenza è poca; ed è in senso contrario nella primavera ed estate.

Per l'altro mare abbiamo analogamente:

Jonio.

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno.
	o	o	o	o	o
Aria	13.5	15.6	23.9	23.0	19.0
Mare.	14.9	14.9	22.9	23.5	19.0
Differenza	— 1.4	+ 0.7	+ 1.0	— 0.5	0.0

cioè nell' inverno si ha ancora la maggior prevalenza della temperatura del mare su quella dell'aria, ma in grado minore che per l' Adriatico; nella media dell' anno la differenza è nulla.

Quanto agli estremi di temperatura osservati, le osservazioni non sono abbastanza uniformi ed in numero sufficiente in ognuno dei gruppi indicati, per avere risultati esatti; ad ogni modo li riferiamo per l'insieme dell'anno, perchè se ne abbia un' idea:

	Aria.		Mare.	
	Adriatico	Jonio	Adriatico	Jonio
Massima . . .	27°.8	29°.8	26°.9	27°.4
Minima	1.9 (1)	10.9	6.4	13.3
Escursione . .	25.9	18.9	20.5	14.1

Come si vede i massimi, specialmente dell'acqua, sono pressochè eguali nei due mari; invece i minimi dell'Adriatico sono molto più bassi di quelli del Jonio: da ciò deriva che l'escursione di temperatura nell'Adriatico è maggiore che nel Jonio, tanto per l'aria che per l'acqua.

Dobbiamo considerare anche le maggiori differenze osservate fra le temperature simultanee dell'aria e del mare, tanto in senso positivo che negativo; abbiamo:

	Adriatico	Jonio
Massimo eccesso della temperatura dell'aria su quella del mare	3°.2	5°.7
Massimo eccesso della temperatura del mare su quella dell'aria	9°.0	4°.0
Escursione	12°.2	9°.7

da cui si vede che l'eccesso della temperatura dell'aria su quella del mare è maggiore nel Jonio, l'eccesso contrario è invece maggiore nell'Adriatico: la ragione è che nell'aria sovrastante all'Adriatico si hanno i maggiori freddi, e per quella del Jonio si hanno i maggiori calori, mentre l'acqua dei due mari tende all'uniformità termica.

Venendo ora a considerare la variazione delle temperature dell'aria e del mare al variare della latitudine, cioè nell'alto, medio e basso Adriatico e nel Jonio, ossia alle latitudini medie di circa 45°, 43°, 40° $\frac{1}{2}$, 38° $\frac{1}{2}$, si ha:

	Inverno			Primavera			Estate			Autunno			Anno		
	Aria	Mare	Diff.	Aria	Mare	Diff.	Aria	Mare	Diff.	Aria	Mare	Diff.	Aria	Mare	Diff.
Adriatico Alto	7°.8	10°.6	−2°.8	15°.0	14°.4	+0°.6	23°.5	23°.3	+0°.2	17°.3	18°.8	−1°.5	15°.9	16°.8	−0°.9
Adriatico Medio	11.1	14.2	−3.1	15.1	14.5	+0.6	24.3	24.1	+0.2	18.2	19.4	−1.2	17.1	18.0	−0.8
Adriatico Basso	11.9	13.5	−1.6	15.0	14.7	+0.3	23.9	23.6	+0.3	19.8	19.7	+0.1	17.7	17.9	−0.3
Jonio	13.5	14.9	−1.4	15.6	14.9	+0.7	23.9	22.9	+1.0	23.0	23.5	−0.5	19.0	19.0	0.0

(1) Nel Golfo di Fiume.

Da cui si ricavano le seguenti conclusioni:

1°. Al diminuire della latitudine entrambe le dette temperature crescono notevolmente nell' inverno e nell' autunno, specialmente passando dall' alto al medio Adriatico; invece nella primavera e nell' estate la variazione delle temperature è piccola e di segno vario; talchè si può dire che in queste due stagioni le temperature medie dell' aria e del mare in un dato giorno sono presso a poco eguali tra loro, e le stesse lungo tutto l' Adriatico e nel Jonio.

2°. L' andamento della temperatura media dal nord al sud è somigliante per l' aria e per il mare, in tutte le stagioni.

3°. Nell' inverno per entrambi i mari, nell' autunno solo per l' Adriatico settentrionale, vi è un forte eccesso della temperatura del mare su quella dell' aria; nella primavera e nell' estate vi è da per tutto un debole eccesso della temperatura dell' aria su quella del mare. Nelle medie complessive dell' anno vi è un eccesso della temperatura del mare su quella dell' aria, il quale eccesso si riduce a zero da nord a sud.

4°. Nell' inverno e nell' autunno le minori differenze (non considerando il segno) hanno luogo nel Canale d' Otranto, perchè in quello stretto il contatto maggiore dell' acqua colle fredde coste, ne abbassa la temperatura, avvicinandola a quella dell' aria.

Riguardo alla variazione diurna della temperatura dell' aria e del mare, queste osservazioni non sono sufficienti a darla colla dovuta precisione; però considerando le medie dei tre gruppi mattutino, diurno e serotino, si può concludere (come era da aspettarsi) che la variazione diurna dell' acqua è minore di quella dell' aria, e che inoltre le maggiori temperature nel mare si verificano con ritardo, vale a dire nel gruppo serotino anzichè nel diurno.

Quel che si è detto per la temperatura del mare, si riferisce solo allo strato superficiale che subisce l' influenza dell' aria: si sa che nel profondo del mare vi sono condizioni affatto diverse.

Quanto si è detto per la temperatura dell' aria si riferisce solo allo strato che ha l' altezza del ponte della nave, che è quello in cui specialmente vive la gente di mare, e che perciò ha singolare importanza pratica. Negli strati più bassi la temperatura dell' aria deve avvicinarsi sempre più a quella dell' acqua, e negli strati più alti la temperatura dell' aria tende ad essere la stessa sulla terra e sul mare, a parità delle altre condizioni.

Del detto ora abbiamo avuta una conferma, confrontando colle temperature, dedotte dalle isotermiche del *Bullettino Meteorico dell' Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica* in Roma, le temperature dell' aria osservate sul piroscafo nel mattino, alle 7 od alle 8 ore, cioè nell' istante medesimo in cui si fanno le osservazioni nelle stazioni meteoriche italiane e per il quale sono tracciate le linee isotermiche. Le dette linee sono condotte per le stazioni che hanno eguale temperatura: le stazioni sono in parte continentali, in parte littoranee, in parte insulari, ma nessuna categoria di sta-

zioni si trova nella condizione di una nave al largo, per sentire l'influenza del mare; perciò le suddette isotermiche non potranno rappresentare esattamente le temperature osservate sull' *Aspromonte*, ma avranno un carattere più *continentale*, per così dire.

Infatti ricavate per interpolazione dalle dette isotermiche le temperature dei luoghi ove si è trovata la nave per tutte le suaccennate osservazioni del mattino, e confrontate con esse, abbiamo avute le seguenti medie delle differenze:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
Numero dei confronti	26	22	10	26	84
Temp. Interp. — Osser.	— 2°.4	— 0°.1	+ 0°.3	— 1°.5	— 0°.9

Risulta che le temperature ricavate dal *Bullettino* sono generalmente più basse di quelle osservate sul mare: nell' insieme dell' anno la differenza è circa di un grado, nell' inverno è molto maggiore, quasi nulla nella primavera, piccola ed in senso contrario d'estate: appunto perchè la terraferma su cui si trova il maggior numero delle stazioni meteoriche si raffredda d'inverno e si riscalda nell' estate di più che il mare, ed anche di più dell' aria ad esso sovrastante.

Risulta pure che sul ponte di una nave al largo la temperatura è più mite che sulla terra, a parità delle altre condizioni.

Si vede poi che onde le isotermiche del *Bullettino*, le quali sono destinate a rappresentare la temperatura dell' aria sulla terra, rappresentino anche le temperature che si hanno sui bastimenti al largo, dovrebbero subire nelle varie stagioni uno spostamento o correzione corrispondente alle differenze date sopra, ma con segno contrario.

Colore del mare. — Confrontando le 71 osservazioni dell' acqua del mare, visto dal ponte della nave, collo stato del cielo corrispondentemente notato, si ha:

Stato del cielo	Colore del mare			
	Biancastro	Celeste	Azzurro	Plumbeo
Sereno. . . .	3	0	38	0
Misto	0	0	13	4
Nuvoloso . . .	0	1	0	11
Caliginoso . .	1	0	0	1

Da cui risulta:

1° Non si ebbe mai mare azzurro con cielo nuvoloso, quasi sempre con cielo sereno, parecchie volte con cielo misto.

2° Non si ebbe mai mare di color plumbeo con cielo sereno, quasi sempre con cielo nuvoloso, talvolta con cielo misto o caliginoso.

3° Il mare biancastro è stato osservato tre volte con cielo sereno, una volta con cielo caliginoso, ma sempre in prossimità della terra.

Dunque si ha mare azzurro quando cospirano a produrre questo colore quello di *diffusione* proprio dell'acqua in grandi masse e quello del cielo pure azzurro *per diffusione*.

Si ha il color plumbeo del mare, quando, essendo il cielo annuvolato, manca la sua luce azzurra, ed è sostituita da quella grigia delle nubi, le quali inoltre si specchiano nel mare, ed anche così gli conferiscono il loro colore.

Si ha mare biancastro con cielo sereno presso le rive in causa delle materie sospese nell'acqua, più abbondanti presso terra, le quali riflettono ogni sorta di luce.

Gli osservatori non hanno notato la tinta verde di transizione che si ha sempre prima di giungere al largo, dipendente da particelle sospese nell'acqua, abbastanza copiose e grossolane per riflettere ogni luce; la quale però ripassando per l'acqua prima di giungere all'occhio dell'osservatore, assume il color verde di *trasmissione* attraverso acqua abbastanza limpida. La ragione di tale omissione è che era stabilito che le osservazioni si facessero al largo; e così solo eccezionalmente gli osservatori notarono alcune volte il colore del mare presso le spiaggie.

I risultati di queste osservazioni sul colore del mare concordano con quelli degli studî di uno di noi sul colore delle acque [1].

Matematica. — *Sulle funzioni reali d'una variabile.* Nota del Corrispondente Carlo Somigliana.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

1. In questa Nota mi propongo di stabilire in tutta la sua generalità il teorema:

Una superficie algebrica possedente un fascio di curve razionali si può trasformare birazionalmente in una rigata, avente il genere p del fascio.

Questo teorema è stato dimostrato per $p=0$ dal sig. Nöther [2], e per $p=1,2$ in una mia Nota precedente.

Appunto il metodo che ivi ho adoperato, viene qui opportunamente esteso. La dimostrazione procede in modo conciso, come è consentito dai limiti imposti al presente scritto.

(1) A. Riccò, Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, vol. V, pag. 101, 1876; vol. VIII, pag. 1, 1879.

(2) *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen, Bd. III.

2. Una superficie possedente un fascio di curve razionali può sempre trasformarsi (col sig. Nöther) in una superficie possedente un fascio di coniche.

Sia F una superficie possedente un fascio di genere p (>1) di coniche C. Come è indicato nella nostra Nota citata, possiamo ottenere sopra F, o una curva bisecante le C spezzata in due unisecanti, oppure due curve irriducibili λ e σ bisecanti armoniche delle C, aventi il genere minimo $2p-1$. La prima ipotesi conduce subito (col sig. Nöther) a rappresentare la F sopra una rigata. Esaminiamo dunque la seconda ipotesi.

Le due curve λ e σ sono riferite doppiamente ad un ente algebrico $\infty' \gamma$, di genere p, che è il fascio delle C o una curva i cui punti corrispondono biunivocamente agli elementi (C) del fascio. Poniamo ora che si possa costruire su γ una serie lineare g'_n cui corrisponda, tanto su λ come su σ, una g'_n (coniugata di se stessa). La possibilità di questa costruzione verrà stabilita in seguito.

Aggruppiamo le curve C ad n ad n, secondo i gruppi della g'_n; otteniamo così sopra F un fascio lineare di curve composte $C_1+C_2+\cdots+C_n$. Tra i gruppi di C che abbiamo costruito consideriamone uno generico $C_1, C_2 \ldots C_n$.

A questo gruppo (che è un gruppo della g'_n fissata su γ), corrispondono su λ due gruppi G_n G'_n di una stessa g'_n ben determinata, i quali, presi insieme, costituiscono le $2n$ intersezioni di λ con $C_1+C_2+\cdots+C_n$; precisamente G_n contiene un punto di C_1, un punto di C_2 ecc., mentre G'_n contiene le intersezioni residue.

In questo modo a due punti di C_1, intersezioni di λ, si possono far corrispondere ordinatamente, in un modo razionalmente determinato, due punti di C_2, due punti di C_3 ecc. Similmente ai due punti di C_1 intersezioni di σ si possono associare in modo razionalmente determinato i due punti di C_2, di C_3 ecc. intersezioni della stessa σ. Ora sopra ciascuna C le coppie segate da λ e da σ si separano armonicamente; quindi si viene a stabilire un riferimento razionalmente determinato di un gruppo armonico di C_1 ad un gruppo armonico di C_2 ecc. Le C_1 $C_2 \ldots C_n$ risultano così riferite proiettivamente l'una all'altra. Ad un punto P_1 di C_1 corrisponde un punto P_2 di $C_2 \ldots$ un punto P_n di C_n.

I gruppi di punti analoghi a P_1 $P_2 \ldots P_n$ formano sopra F una involuzione I_n. Riferiamo i gruppi di I_n ai punti d'una nuova superficie F'. Sopra F' si avrà un fascio *lineare* di curve razionali C', corrispondenti ciascuna ad n curve C: C_1 $C_2 \ldots C_n$. Si può costruire (col sig. Nöther) una curva unisecante le C' su F'; a questa curva corrisponde su F una curva unisecante le C, la quale permette di riferire la F ad una rigata.

3. Resta pertanto da stabilire il lemma di cui abbiamo fatto uso:

Se due curve λ e σ di genere $P=2p-1$ sono riferite ad una stessa curva doppia γ di genere $p>1$ (senza punti di diramazione) [1], si può co-

[1] È noto che esistono $2^{2p}-1$ curve di genere P, birazionalmente distinte, riferibili ad una stessa curva doppia di genere p, senza punti di diramazione. Cfr. Hurwitz « *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspuncten* ». Math. Annalen Bd. 39.

struire su γ una g'_n cui corrisponda tanto su λ come su σ una g'_n (trasformata in sè stessa dall'involuzione γ' di cui le coppie corrispondono ai punti di γ).

Anzitutto si noti che n deve esser pari, cioè $n = 2m$, perchè su λ (o su σ) una g'_n trasformata in sè stessa dall'involuzione γ' deve possedere due gruppi uniti, costituiti ciascuno da $\frac{n}{2}$ coppie di γ'.

Ora il problema proposto sembra ammettere soluzioni per $m \geq p - 1$ come si desume da un opportuno conto di costanti. Ma volendo togliere ogni dubbio resultante dall'uso di procedimenti enumerativi forse non pienamente rigorosi, risolveremo il problema proposto per $m = P$.

Prendasi su γ un arbitrario gruppo G_P di $P = 2p - 1$ punti; esso appartiene ad una serie completa non speciale g^{p-1}_{2p-1} che indicheremo con s.

A questa serie corrisponde su λ (e ugualmente su σ) una serie g^{p-1}_{4p-2} composta mediante la involuzione γ' di cui le coppie corrispondono ai punti di γ; la g^{p-1}_{4p-2} appartiene ad una serie completa (non speciale) g^{2p-1}_{4p-2}. Ora mediante la serie g^{2p-1}_{4p-2} si trasformi la curva λ in una curva d'ordine $4p - 2$ di un S_{2p-1}; questa verrà trasformata in sè stessa da un'involuzione proiettiva che ha uno spazio di punti uniti S_{p-1}, base pel sistema ∞^{p-1} degli iperpiani che segano su λ la g^{p-1}_{4p-2} sopra nominata; l'involuzione stessa ammetterà dunque un altro S_{p-1} di punti uniti, il quale sarà pure base per un sistema ∞^{p-1} di iperpiani seganti su λ un'altra serie g^{p-1}_{4p-2} composta colle coppie dell'involuzione γ'.

Cerchiamo che cosa corrisponde su γ alle serie considerate su λ. Otterremo come corrispondente alla g^{2p-1}_{4p-2} una serie non lineare contenuta nella serie completa g^{3p-2}_{4p-2} doppia della $g^{p-1}_{2p-1} \equiv s$; entro questa serie non lineare, e per conseguenza entro la g^{3p-2}_{4p-2}, si avrà, oltre la nominata $g^{p-1}_{2p-1} \equiv s$ contata due volte, un'altra g^{p-1}_{2p-1} (che designeremo con s') pure contata due volte, in corrispondenza alla seconda g^{p-1}_{4p-2} composta colle coppie di γ' che abbiamo costruito su λ.

Le due g^{p-1}_{2p-1} ottenute su γ, s ed s', non hanno gruppi comuni; un gruppo qualunque G della prima, ed un gruppo G′ della seconda, non sono equivalenti, ma contati due volte appartengono ad una g'_{4p-2} cui corrisponde sopra λ una g'_{4p-2} trasformata in se stessa dall'involuzione γ'.

Ripetendo gli stessi ragionamenti in relazione alla curva σ, otterremo ancora su γ un'altra serie g^{p-1}_{2p-2} che designeremo con s'', non avente gruppi comuni con s, tale che un qualsiasi gruppo G di s ed un gruppo G″ di s'', contati due volte, appartengono ad una g'_{4p-2} cui corrisponde sopra σ una g'_{4p-2} trasformata in sè stessa dall'involuzione γ'; la serie s'' come s' appartiene, contata due volte, alla serie completa g^{3p-2}_{4p-2} doppia della s.

Ora le serie complete s' ed s'' non hanno alcun gruppo comune, oppure coincidono; nel secondo caso una qualsiasi g'_{4p-2} determinata da un gruppo

di s e da un gruppo di s', contati due volte, dà ugualmente una g'_{4p-2} tanto su λ che su σ, e quindi risolve il problema proposto. Ma in questo caso è anche facile vedere che λ e σ sono birazionalmente identiche.

Supponendo λ e σ birazionalmente distinte, avremo dunque su γ tre serie g_{2p-1}^{p-1}: s, s', s'', senza gruppi comuni, le quali, contate due volte, appartengono ad una stessa g_{4p-2}^{3p-2}, la risoluzione del problema proposto dipende dalla costruzione di una g'_{4p-2} contenente tre gruppi di $2p-1$ punti, ciascuno contato due volte, contenuti risp. entro le serie s, s', s''. Tale costruzione si effettua in un numero finito di modi. Infatti si trasformi γ in una curva γ_1 d'ordine $4p-2$ di S_{3p-2}, mediante la nominata serie g_{4p-2}^{3p-2}; i gruppi della serie s verranno dati su γ_1 da iperpiani tangenti in $2p-1$ punti, formanti una certa serie s_1, ∞^{p-1}. Analogamente si avranno altre due serie ∞^{p-1} di iperpiani: s'_1, s''_1, in corrispondenza alle serie s', s'' di γ; e le tre serie di iperpiani s_1 s'_1 s''_1 non avranno, due a due, alcun iperpiano comune. Ora uno spazio S_{3p-4} che sia comune a tre iperpiani appartenenti risp. alle serie s_1, s'_1, s''_1 è base di un fascio d'iperpiani secante sopra γ_1 una g'_{4p-2} che contiene tre gruppi di $2p-1$ punti, ciascuno contato due volte, risp. contenuti in s, s', s''. Di tali S_{3p-4} ve n'è un numero finito che è il prodotto delle classi delle tre serie d'iperpiani considerate. Ciò si vede più chiaramente eseguendo una trasformazione per dualità. Infatti si hanno allora da determinare le rette dello S_{3p-4} che incontrano tre varietà V_{p-1}, di dimensione $p-1$, senza punti comuni; tali rette si ottengono segando una delle V_{p-1} colla varietà V_{2p-3} delle rette congiungenti i punti delle altre due.

Pertanto resta risoluto il problema proposto.

Chimica fisica. — *Nuove considerazioni sugli equilibrî fisici nelle miscele isomorfe.* Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio G. Ciamician.

In un lavoro precedente (1) io ho studiato i fenomeni di equilibrio fisico nelle miscele isomorfe ed ho mostrato come le regole poste da Küster (2) intorno a questi fenomeni non siano accettabili.

Io ho segnatamente preso in esame la seconda regola di Küster, la quale dice che per miscele di sostanze perfettamente isomorfe la fase solida che si separa nel congelamento ha la stessa composizione della liquida. Ho mostrato che questa regola è contraria sia ai dati sperimentali come alle speculazioni teoriche, ed ho particolarmente rilevato come essa sia in contraddizione con la formola che secondo Beckmann (3) rappresenta i fenomeni che avvengono nella separazione di una soluzione solida.

(1) Rendic. di questa Accad., 1898, 2° sem., 138.
(2) Zeitschr. f. physik. Ch. V, 601; VIII, 584; XII, 508; XVI, 525; XVII, 357.
(3) Zeitschr. f. physik. Ch. XXII, 612.

Potrebbe dunque sembrare inutile il cercare nuovi argomenti per dimostrare erronea questa regola. Però il provare in modo assolutamente rigoroso tale erroneità ha, a mio avviso, un' importanza considerevole. Fu infatti certamente il comportamento che in base a questa regola spetterebbe alle miscele isomorfe, e (che sarebbe in contraddizione colla teoria di van 't Hoff sulle soluzioni solide), l' argomento principale che spinse Küster a sostenere il principio che le miscele isomorfe non debbano considerarsi come soluzioni solide nel senso della teoria di van 't Hoff. Questa tesi fu poscia (almeno implicitamente) abbandonata da Küster; ma essa viene ora ripresa e sostenuta da Bodländer in una monografia () pubblicata contemporaneamente al mio succitato lavoro.

Una dimostrazione rigorosa della seconda regola di Küster non deve quindi sembrare inutile. Una tale dimostrazione può trarsi da un teorema di J. Willard Gibbs ([2]), illustrato poscia e più esplicitamente esposto da Duhem ([3]).

Questo teorema si riferisce ai sistemi di due componenti coesistenti in due fasi. Esso si dimostra in base a deduzioni termodinamiche e si enuncia così: « *In un sistema di due fasi coesistenti, è necessario e sufficiente che* « *le due fasi abbiano la stessa composizione perchè a pressione costante* « *la temperatura sia un massimo od un minimo* ».

Questo punto di massimo o di minimo nella curva di equilibrio rappresenta un sistema in equilibrio non più stabile ma indifferente, e secondo la proposta di Duhem esso può essere chiamato *punto indifferente.*

Una dimostrazione di tale principio nel caso speciale dei sistemi che constano di una fase liquida e di una fase gassosa venne pure data da Duhem ([4]), e per questo caso speciale esso venne verificato sperimentalmente nelle note esperienze di D. Konowalow ([5]).

La dimostrazione di Gibbs è però suscettibile di un' applicazione più generale, poichè essa vale pei sistemi di due componenti coesistenti in due fasi, in qualunque stato d' aggregazione queste si trovino.

Nel caso di sistemi composti da una fase solida ed una liquida, il suddetto teorema venne verificato sperimentalmente più volte, e citerò a questo proposito le esperienze di Bakuis Roozeboom sulla solubilità dei sali idrati nell' acqua ([6]).

([1]) Ueber feste Lösungen. Neues Jahrbuch f. Miner., Geol., u. Paläont.. XII, 92.

([2]) Transact. Connecticut Academy, III, 155; Thermodynamische Studien (deutsch v. W. Ostwald), pag. 118.

([3]) Zeitschr. f. physik. Ch. VIII, 337.

([4]) Annales de l'École normale sup. [3] IV, 12; VI, 153.

([5]) Wied. Ann. XIV, 314, 219.

([6]) Zeitschr. f. physik. Ch. X, 477.

Applichiamo ora tale teorema al caso del congelamento delle miscele isomorfe, e confrontiamolo colla seconda regola di Küster. Questa dice che corrispondentemente a tutti i punti della curva di congelamento, si separano fasi solide che hanno la stessa composizione della liquida; il teorema di Gibbs dice che è sufficiente l'uguaglianza di composizione fra le due fasi, perchè a pressione costante si abbia un massimo od un minimo di temperatura.

La contraddizione fra le due proposizioni è evidente; e poichè l'esperienza e la teoria dimostrano che nelle curve di congelamento delle miscele isomorfe non si hanno punti di massimo nè di minimo, si deduce facilmente e sicuramente che in nessun punto di tale curva può separarsi una fase solida che abbia la stessa composizione della liquida.

In un solo caso potrebbe verificarsi la regola di Küster: quando la curva di congelamento per una pressione data fosse parallela all'asse delle concentrazioni; cioè quando i due componenti abbiano la stessa temperatura di congelamento, ed aggiunti l'uno nell'altro non producano in questa alcuna variazione. Questo era già stato dedotto da me applicando a tale caso la formola di Beckmann. E difatti Küster potè verificare approssimativamente la sua regola solo in casi che si accostano alle condizioni suindicate.

Così viene dimostrata l'erroneità della regola di Küster, e viene così eliminata un'apparente contraddizione fra il comportamento delle miscele isomorfe e la teoria delle soluzioni solide.

P. B.

INDICE DEL VOLUME VII, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1898 — 2° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

N

P

R

S

T

INDICE PER MATERIE

G

M

N

P

ERRATA-CORRIGE

(Vol. VII 1° sem. 1898).

A pag. 285 lin. 3, invece di *sostanza nucleare* legg. *sostanza nucleolare.*

(Vol. VII 2° sem. 1898).

A pag. 10 fig. 1, all'estremità della curva a destra, invece di *100* legg. *150*
» 36 lin. 8 invece di *o, 2.....* legg. *0, 2.....*
» 37 » 6 a f. invece di *liasinus* legg. *lithonicus*
» 62 » 5 » » y^p » y_p
» 65 » 6 » sopprimere la virgola dopo la parola *precedente.*
» 281 » 19, leggasi: *di cui talune sono ovvie, mentre altre...*

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume VII.° — Fascicolo 1°

2° SEMESTRE

Comunicazioni pervenute all' Accademia sino al 3 luglio 1898.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all' Accademia sino al 3 luglio 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

CONCORSI A PREMI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume VII.° — Fascicolo 2°

2° SEMESTRE

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 17 *luglio* 1898.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Luglio 1898.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 17 luglio 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume VII.° — Fascicolo 3°

2° Semestre

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 7 agosto 1898.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 3°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 7 agosto 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ELEZIONI DI SOCI

CORRISPONDENZA

ERRATA-CORRIGE

A pag. 10 fig. 1, all'estremità della curva a destra, invece di *100* legg. *150*
» 36 lin. 8 invece di $o, 2.....$ legg. $0, 2.....$
» 37 » 6 a f. invece di *liasinus* legg. *lithonicus*
» 62 » 5 » » y^p » y_p
» 65 » 6 » sopprimere la virgola dopo la parola *precedente*.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume VII.° — Fascicolo 4°

2° Semestre

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 21 agosto 1898.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 4°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 21 agosto 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume VII.° — Fascicolo 5°

2° Semestre

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 4 settembre 1898.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 5°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 6°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 4 settembre 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume VII.° — Fascicolo 6°

2° Semestre

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 18 *settembre* 1898.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all' autore. - *d)* Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 6°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 6°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 18 settembre 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume VII.° — Fascicolo 7°

2° Semestre

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 2 ottobre 1898.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 7°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 2 ottobre 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume VII.° — Fascicolo 8°

2° SEMESTRE

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 16 *ottobre* 1898.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Comunicazioni pervenute all' Accademia prima del 16 ottobre 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 8°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 novembre 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 9°

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Novembre 1898.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 novembre 1898.

ERRATA-CORRIGE

Vol. VII, 1° sem. 1898 pag. 285 lin. 3, invece di *sostanza nucleare* legg. *sostanza nucleolare*.

(*) Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 *novembre* 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 10°

2° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 10°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 6°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 novembre 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 dicembre 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 11°

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei· qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 11°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 6°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 dicembre 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

ERRATA-CORRIGE

A pag. 281 linea 19, leggasi: *di cui talune sono ovvie, mentre altre...*

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 dicembre 1898.

Volume VII.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 dicembre 1898.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 2° Sem. Fasc. 12°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*